Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті

ӘОЖ 517.51 Қолжазба құқығында

**ӘБЕК АЖАР НАРТАЙҚЫЗЫ**

**Жалпыланған бөлшекті-максималды функциядан туындаған конустар және ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктерге енгізулер**

8D05401 – Математика

Философия докторы (PhD)

дәрежесін алу үшін дайындалған диссертация

Ғылыми кеңесші

физика-математика ғылымдарының докторы,

профессор

Бокаев Н.А.

Шетелдік ғылыми кеңесші

доктор PhD,

профессор

Гогатишвили А.

(Чехия Республикасы)

Қазақстан Республикасы

Астана, 2024

# МАЗМҰНЫ

|  |  |
| --- | --- |
| **БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР** | 3 |
| **КІРІСПЕ** | 4 |
| **1 АУЫСТЫРМАЛЫ-ИНВАРИАНТТЫҚ КЕҢІСТІКТЕР НЕГІЗІНДЕ ҚҰРЫЛҒАН ЖАЛПЫЛАНҒАН БӨЛШЕКТІ-МАКСИМАЛДЫ ФУНКЦИЯЛАР КЕҢІСТІГІ** | 27 |
| 1.1 Банах функционалды кеңістіктері, ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктер | 27 |
| 1.2 Жалпыланған бөлшекті-максималды функция және жалпыланған бөлшекті-максималды функция кеңістіктері | 34 |
| 1.3 Жалпыланған бөлшекті-максималды функцияны жалпыланған Рисс потенциалымен салыстыру | 39 |
| 1.4 Жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруын бағалау | 40 |
| 1.5 Жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруының конустары | 49 |
| 1.6 Жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруынан туындаған конустар мен жалпыланған Рисс потенциалының өспейтін алмастыруынан туындаған конустарды салыстыру | 55 |
| 1 бөлім бойынша қорытынды………………………………………………. | 57 |
| **2 ЖАЛПЫЛАНҒАН БӨЛШЕКТІ-МАКСИМАЛДЫ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ КЕҢІСТІКТЕРІН АУЫСТЫРМАЛЫ- ИНВАРИАНТТЫҚ КЕҢІСТІКТЕРГЕ ЕНГІЗУ** | 59 |
| 2.1 Жалпыланған бөлшекті-максималды функциялардың кеңістіктерін ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктерге енгізу критерийлері | 59 |
| 2.2 енгізуі үшін оңтайлы ауыстырмалы-инварианттық кеңістік | 61 |
| 2.3 салмақты Лоренц кеңістігін салмақты Лоренц кеңістігіне оңтайлы енгізу | 63 |
| 2.4 салмақты Лоренц кеңістіктеріндегі жалпыланған бөлшекті-максималды функция операторының шенелгендігі туралы. | 72 |
| 2 бөлім бойынша қорытынды………………………………………………. | 77 |
| **ҚОРЫТЫНДЫ** | 78 |
| **ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ** | 79 |

# БЕЛГІЛЕУЛЕР МЕН ҚЫСҚАРТУЛАР

|  |  |
| --- | --- |
|  | – натурал сандар жиыны |
|  | – натурал сандар жиыны, оның ішінде 0 |
|  | – нақты сандар жиыны |
|  | – теріс емес өлшемді функциялар жиыны |
|  | – Лебег кеңістігі |
|  | – ауыстырмалы-инварианттық кеңістік |
|  | – ассоцирленген кеңістік |
|  | – Люксембург өрнектеуі |
|  | – Лебег үлестіру функциясы |
|  | – Лебег өлшемі |
|  | – функциясының өспейтін алмастыруы |
|  | – функционалдық норма |
|  | – сипаттамалық функция |
|  | – жалпыланған бөлшекті-максималды функция |
|  | – жалпыланған бөлшекті-максималды функция кеңістігі |
|  | – потенциалдар кеңістігі |
|  | – үйірткі: |
| *, , ,* | – жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруынан туындаған конустар |
|  | – нүктелік бүркеу |
|  | – конусы конусын ретімен бүркейді |
|  | – оңтайлы ауыстырмалы-инварианттық кеңістік |
|  | **–** салмақты Лоренц кеңістігі |

# КІРІСПЕ

**Тақырыптың өзектілігі.** Классикалық интегралдық операторлар, бөлшекті-максималды функция және Рисс потенциалы гармоникалық талдауда, функциялық кеңістіктер теориясында, потенциалдар теориясында және дербес дифференциалдық теңдеулерді шешуде маңызды рөл атқарады.

Максималды операторлар және потенциал типтес интегралдар теориясының, функционалдық кеңістіктердің бай тарихы бар және оған көптеген жұмыстар арналған (М. Рисс, Г.Х. Харди, Д.Литтлвуд, С.Соболев, С.М. Никольский [1], О.В. Бесов, В.П. Ильин [2], Х.Трибель [3, 4], И.Стейн [5], Г.Вейс [6], Е.Накаи [7, 8], П.И. Лизоркин, Д.Р. Адамс, Л.И. Хедберг, С.Самко [9-12], В.Кокилашвили [13, 14], В.И. Буренков [15-20], М.Л. Гольдман, А.Гогатишвили [21-26], В.Гулиев [27-29], т.б.). Лебег кеңістігіндегі классикалық максималды оператордың, бөлшекті-максималды оператордың және Рисс потенциалының шенелу мәселелері кеңінен белгілі.

Бұл диссертациялық жұмыста ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктерге негізделген жалпыланған бөлшекті-максималды функциялар кеңістігі және жалпыланған Рисс потенциалы кеңістігі қарастырылады. Бұл екі оператор сәйкесінше қандай да бір функциясымен және потенциалдар ядросымен анықталады.

Классикалық бөлшекті-максималды функциялардан және дәрежелік функциямен анықталатын классикалық Рисс потенциалынан айырмашылығы, сәйкес класстардан алынатын функциясымен анықталатын жалпыланған бөлшекті-максималды функциясы, жалпы ядросымен анықталатын жалпыланған Рисс потенциалы қарастырылады. Біз қарастырған жалпыланған бөлшекті-максималды функциялар жалпы функцияларды қамтиды (міндетті түрде дәрежелік функция түрінде емес). Мұндай жалпылаулар функцияның дифференциалдық және интегралдық қасиеттерін сипаттауда үлкен икемділікті қамтамасыз етеді және классикалық потенциалдар мен максималды функциялар нәтиже бермейтін жағдайларда мағыналы жаңа нәтижелер алуға және теоремаларды дәлелдеуге мүмкіндік береді.

Осындай операторлардың көмегімен ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктер негізінде құрылатын жалпыланған бөлшекті-максималды функциялардың кеңістігі анықталады, және осы кеңістіктің ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктерге енгізу сұрақтары зерттеледі. Мұндай енгізуді зерттегенде монотонды өспейтін функциялардан құрылған әртүрлі конустар пайда болады. Жалпыланған бөлшекті-максималды функциялардың өспейтін алмастыруынан құрастырылған конустардың қасиеттері зерттеледі. Мұндай конустардың көмегімен жалпыланған бөлшекті-максималды функциялар кеңістігін ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктерге енгізу критерийлері тұжырымдалады. Бұл жағдайда конустардың өзара бүркеу мәселелері маңызды рөл атқарады.

Соңғы онжылдықтарда Морри типес кеңістіктердегі әртүрлі классикалық интегралдық операторлардың шенелгендігі туралы есептер белсенді түрде зерттелуде (В.И. Буренков, М.Л. Гольдман [30-36], А.Гогатишвили, В.Гулиев, Р.Мустафаев, И.Чен [37-38], Т.Мизухара [39], Е.Накай, В. Йан, В.Зикель, Д.Йанг, Е.Д. Нурсултанов, Р.Ойнаров, Н.А. Бокаев, т.б.).

Интегралдық операторлардың ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктерге енгізу теоремаларындағы, функционалдық кеңістіктер теориясындағы негізгі рөлі және оларды дербес туындылы теңдеулер теориясында қолдану кеңінен белгілі.

**Жұмыстың мақсаты:**

* жалпыланған бөлшекті-максималды функцияны және жалпыланған бөлшекті-максималды функциялардың кеңістіктерін анықтау, мұндай кеңістіктерді ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктерге енгізу мәселелерін зерттеу;
* жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруларының бағалауларын алу;
* жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруынан құрылған әртүрлі конустарды қарастыру және олардың өзара бүркеу шарттарын алу.

**Зерттеу міндеттері.** Бұл жұмыстың міндеті мынадай сұрақтарды зерттеу болып табылады: жалпыланған бөлшекті-максималды функцияны анықтау және жалпыланған бөлшекті-максималды функциялар кеңістігін қарастыру; жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруы үшін әртүрлі бағалауларды алу; оның өспейтін алмастыруымен байланысты әр түрлі конустар құрастыру және мұндай конустардың өзара бүркеу шарттарын алу; жалпыланған бөлшекті-максималды функциялардың кеңістігін ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктерге енгізу шарттарын алу, мұндай енгізу үшін оңтайлы ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктің сипаттамасын алу; супремалды оператордың салмақты Лоренц кеңістігінде шенелген болуының шарттарын алу.

**Зерттеу нысаны** – жалпыланған бөлшекті-максималды функциялардың кеңістіктері және олардан туындаған конустар. Жалпыланған бөлшекті-максималды функциялар кеңістігін ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктерге енгізу.

**Зерттеу пәні.** Жалпыланған бөлшекті-максималды функциялар кеңістіктері және олардың ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктерге енгізілуі.

**Зерттеу әдістері.** Негізгі зерттеу әдістері: операторлардың функционалдық кеңістіктердегі теориясының әдістері қолданылады; функцияның өспейтін алмастыруларын пайдалану; өспейтін функциялардан құрылған конустардың құрылысы және олардың эквивалентті болуының шарттарын табу; жалпыланған бөлшекті-максималды функциялар кеңістігін ауыстырмалы-инвариантты кеңістікке енгізудің оңтайлы кеңістігін құру.

Мұндай есептерді жүзеге асыру үшін жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруының бағалауын алу қажет.

**Жұмыстың басқа зерттеу жұмыстарымен байланысы.**

Диссертациялық жұмыс Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің келесі гранттық қаржыландыру жобасының ғылыми-зерттеу жоспарларына сәйкес орындалды:

1. AP14869887 «Жалпыланған бөлшек максималды оператор, функционалдық кеңістіктердегі жалпыланған Рисс және Бессель потенциалдары және олардың қолданылуы» 2022-2024 жж.

**Ғылыми жаңалық.** Бұл жұмыста келесі жаңа нәтижелер алынды:

* жалпыланған бөлшекті-максималды функция анықталды, ол белгілі бір жағдайда классикалық бөлшекті-максималды функциямен сәйкес келеді;
* жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруы үшін әртүрлі бағалаулар алынды;
* функциялардың өспейтін алмастыруымен байланысты әр түрлі конустар құрастырылды және мұндай конустардың өзара бүркеу шарттары алынды;
* жалпыланған бөлшекті-максималды функция мен жалпыланған Рисс потенциалы арасындағы байланыстар қарастырылды;
* жалпыланған бөлшекті-максималды функциялардың кеңістігін ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктерге енгізу шарттары алынды;
* мұндай енгізу үшін оңтайлы ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктің сипаттамасы алынды;
* салмақты Лоренц кеңістігінде супремалды оператордың шенелген болуының шарттары алынды.

Алынған нәтижелер М.Л. Гольдман, А.Гогатишвили, А.Цианчи, Р.Керман, Б.Опик, Л.Пик, Е.Бақтыгареева, Н.А. Бокаев, Г.Ж. Каршыгина және т.б. жұмыстарының жалғасы болып табылады.

**Жұмыстың теориялық және практикалық құндылығы.** Жұмыстың ғылыми нәтижелері теориялық сипатқа ие. Жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруы үшін алынған бағалаулар негізінде монотонды кемімелі функциялардың әртүрлі конустары қарастырылды. Нәтижесінде жалпыланған бөлшекті-максималды функциялар кеңістігін ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктерге енгізу критерийлері алынады. Жалпыланған бөлшекті-максималды функция мен жалпыланған Рисс потенциалы арасында салыстыру жүргізілді.

Алынған нәтижелерді ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктердегі басқа операторларды зерттеуде қолдануға болады.

Жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның интегралдық қасиеттерін зерттеу басқа интегралдық метрикадағы функцияның тегістік қасиеттерін одан әрі зерттеуге негіз болады.

Алынған ғылыми нәтижелерді студенттер, магистранттар және докторанттарға арналған арнаулы курстарда пайдалануға болады.

**Жүргізілген зерттеулердің дұрыстығы мен негізділігі** келтірілген теоремалар мен леммалардың ұсынылған дәлелдеулерімен қамтамасыз етіледі, келтірілген жарияланымдармен негізделеді.

**Диссертациялық жұмыстың ішкі бірлігі.** Диссертациялық жұмыстың ішкі бірлігі зерттеу мақсаты мен міндеттері арқылы жүзеге асады. Диссертацияда алынған негізгі нәтижелер функционалдық кеңістіктердегі операторлар теориясының ғылыми жаңалығын анықтауға мүмкіндік берді. Бұл жұмыстың ішкі бірлігінің белгісі – жалпыланған бөлшекті-максималды функциялардың өспейтін алмастыруынан құрылған әртүрлі конустар арасындағы байланысты зерттеу және мұндай функциялардан құрылған кеңістіктің ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктерге енгізілуі.

**Автордың жеке үлесі.** Зерттеу барысында автор ғылыми кеңесшілердің жетекшілігімен мақалаларды дайындауға байланысты жұмыстың барлық кезеңдеріне тікелей қатысты. Негізгі нәтижелерді алуға автор жеке үлес қосты.

**Жұмыстың апробациясы.** Диссертацияның нәтижелері келесі семинарлар мен конференцияларда баяндалып, талқыланды:

1. «Ǵylym jáne bіlіm – 2021» студенттер мен жас ғалымдардың XVI Халықаралық ғылыми конференциясы, Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, 12 сәуір 2021 ж. (Нұр-Сұлтан).
2. «Algebra, Topology and Analysis: and algebras», Summer School Gonio (Batumi, 2021 – 30.08-03.09).
3. Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан (Алматы: Институт математики и математического моделирования, 2022).
4. «Ǵylym jáne bіlіm – 2022» студенттер мен жас ғалымдардың ХVII Халықаралық ғылыми конференциясы, Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, 12 сәуір 2022 ж. (Нұр-Сұлтан).
5. IX Халықаралық ғылыми конференция «Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра проблемалары», Ақтөбе: Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, 24-28 мамыр 2022 ж.
6. «Математика, механика және информатиканың өзекті мәселелері» профессор Т.Ғ. Мұстафинның 80 жылдығына арналған халықаралық ғылыми конференция (Қарағанды: Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, 8-9 қыркүйек 2022 ж.).
7. International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME - 2022) (Denizli: Pamukkale University, 2022).
8. Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан (Алматы Институт математики и математического моделирования, 2023).
9. «Ломоносов – 2023» Студенттердің, магистранттардың және жас ғалымдардың XVIII Халықаралық ғылыми конференциясы, 14-15 сәуір 2023 ж. (Астана қ.)
10. «Ǵylym jáne bіlіm – 2023» студенттер мен жас ғалымдардың ХVIII Халықаралық ғылыми конференциясы, Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, 12 сәуір 2023 ж. (Астана)
11. 6thinternational Hybrid conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA-2023) (Istanbul: Yildiz Technical University, 2023).
12. Международная научно-практическая конференция «Анализ, дифференциальные уравнения и их приложения» посвященная 100-летию со дня рождения Т.И. Аманова (Астана: Казахстанский филиал МГУ им. М.В. Ломоносова, ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, 2023).
13. Түркі әлемі математиктерінің VII Дүниежүзілік конгресі (TWMS Congress-2023), 20-23 қыркүйек 2023 ж. (Түркістан).

Сондай-ақ, диссертациялық жұмыстың нәтижелері Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ «Іргелі математика» кафедрасының ғылыми семинарларында баяндалып, талқыланды:

1. «Функционалдық талдау және оның қосымшалары» ғылыми семинары, Жетекшілері: ҚР ҰҒА академигі Р.О. Ойнаров, Е.Д. Нұрсұлтанов, Қ.Н. Оспанов, 19 қазан 2023 жыл, 02 қараша 2023 жыл, 16 қараша 2023 жыл.

**Жарияланымдар.** Диссертация тақырыбы бойынша 19 еңбек жарияланды (4 мақала, 15 тезис): оның ішінде 2 мақала Scopus базасында индекстелетін журналда («Eurasian Mathematical Journal», процентиль – 49, «Bulletin of the Karaganda university. Mathematics Series», процентиль – 35), 2 мақала Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым және жоғары білім саласындағы сапаны камтамасыз ету комитеті ұсынған журналдарда және 15 жұмыс халықаралық ғылыми конференциялардың материалдарында жарияланды.

Бірлескен авторлармен орындалған жұмыстарда автор ғылыми кеңесшілердің жетекшілігімен мақалаларды дайындауға байланысты жұмыстың барлық кезеңдеріне тікелей қатысты. Негізгі нәтижелерді алуға автор жеке үлес қосты.

**Мақалалар:**

1. On estimates of non-increasing rearrangement of generalized fractional maximal function // Eurasian Math. Journal. – 2023. – Vol. 14, №2. – P. 13-23 (ScopusCiteScore-1.3, 49 -процентиль) (ҒЖБССҚК).
2. Cones generated by a generalized fractional maximal function // Bulletin of the Karaganda university Mathematics series. – 2023. – Vol. 110, №2. – P. 53-62 (ScopusCiteScore-1, 35 -процентиль) (ҒЖБССҚК).
3. On the boundedness of a generalized fractional-maximal operator in Lorentz spaces // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science "AL-farabi Kazakh National University". – 2023. – Vol. 118, №2. – P. 3-10 (ҒЖБССҚК).
4. On non-increasing rearrangements of the generalized fractional maximal function // Bulletin Abai KazNPU Series of Physics & Mathematical Sciences. – 2023. – Vol. 82, № 2. – P. 7-14 (ҒЖБССҚК).

**Тезистер**:

1. On non-increasing rearrangements of generalized fractional maximal functions // Научный журнал Вестник Актюбинского регионального университета им. К. Жубанова. – 2022. – Vol.67, №2. – P. 24-29.
2. Об оценке обобщенной дробно-максимальной функции // Ǵylym jáne bіlіm – 2021: студенттер мен жас ғалымдардың 16-шы халықаралық ғылыми конференциясы (Астана, 2021. – Б. 1276-1280).
3. On the cones generated by a generalized fractional maximal function // Традиционная международная апрельская математическая конференция, посвященная Дню работников науки Республики Казахстан: тезисы докладов (Алматы, 2022. – С. 14-15).
4. The generalized fractional-maximal function and estimate of its non-increasing rearrangement // Ǵylym jáne bіlіm – 2022: студенттер мен жас ғалымдардың 17-ші халықаралық ғылыми конференциясы (Астана, 2022. – Б. 1576-1579).
5. On non-increasing rearrangements of generalized fractional maximal functions // Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра проблемалары: 9-шы халықаралық ғылыми конференция (Ақтөбе: Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, 2022. – Б. 19-23).
6. О вложениии пространства обобщенных дробно-максимальных функции в перестановочно-инвариантные пространства // Актуальные задачи математики, механики и информатики: материалы международной научной конференции, посвященной 80-летию профессора Т.Г. Мустафина (Караганда: Карагандинский университет им. Академика Е.А. Букетова, 2022. – С. 15-17).
7. On the embedding of the space of generalized fractional-maximal functions in rearrangement-invariant spaces // Традиционная международная апрельская математическая конференция, посвященная Дню работников науки Республики Казахстан: тезисы докладов (Алматы, 2023. – С. 131-132).
8. Some estimates of non-increasing rearrangement of generalized fractional maximal function and cones generated by them // Ǵylym jáne bіlіm – 2023: студенттер мен жас ғалымдардың 18-ші халықаралық ғылыми конференциясы (Астана, 2023. – Б. 1262-1266).
9. Характеризация одного весового интегрального неравенства // Материалы 18-й международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых «Ломоносов – 2023» (Астана, 2023. – С. 7-9).
10. Cones generated by a generalized fractional maximal function // 6th international hybrid conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA-2023): conference proceedings of Science And Technology (Istanbul, 2023. – P. 11-16).
11. On non-increasing rearrangement of generalized fractional maximal function // 6th international Hybrid conference on Mathematical Advances and Applications (Istanbul, 2023. – P. 59).
12. Criteria for embedding of the space of generalized fractional-maximal functions in rearrangement-invariant spaces // Материалы международной научно-практической конференции «Анализ, дифференциальные уравнения и их приложения» посвященная 100-летию со дня рождения Т.И. Аманова (Астана, 2023. – С. 53-55).
13. Characterisation of the cones of monotone functions generated by generalized fractional-maximal functions // Түркі әлемі математиктерінің VII Дүниежүзілік Конгресі (TWMS Congress-2023) (Түркістан, 2023. – Б. 200).
14. On the embedding of the space of generalized fractional-maximal functions in rearrangement-invariant spaces // Түркі әлемі математиктерінің VII Дүниежүзілік Конгресі (TWMS Congress-2023) (Түркістан, 2023. – Б. 201).
15. Cones of monotone functions generated by a generalized fractional maximal functions // Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения: тезисы докладов международной научной конференции (Ташкент, 2023. – Ч. 2. – C. 23-24).

**Диссертацияның құрылымы мен көлемі.** Жұмыс кіріспеден, ішкі бөлімдерден тұратын 2 бөлімнен, қорытындыдан және пайдаланылған әдебиеттер тізімінен тұрады.

Формулаларды нөмірлеу үш көрсеткіштен тұрады. Бірінші көрсеткіш бөлімнің нөмірін, екінші көрсеткіш бөлімнің бөлімшелерінің ретін, үшінші көрсеткіш осы бөлімшедегі формулалардың ретін көрсетеді. Диссертацияның жалпы көлемі 82 бетті құрайды.

**Пайдаланылған дереккөздер саны** – 53.

**Кілт сөздер.** Жалпыланған бөлшекті-максималды функция, жалпыланған Рисс потенциалы, функциялар кеңістігі, өспейтін алмастырулар, конустар, ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктер, енгізу теоремалары.

**Диссертацияның мазмұнына қысқаша сипаттама.**

**Кіріспеде** жұмыстың қысқаша шолуы, мақсаттары белгіленіп, жұмыстың мазмұны көрсетілген.

**Бірінші бөлімде** жалпыланған бөлшекті-максималды функция және жалпыланған бөлшекті-максималды функциялардың кеңістіктері анықталған. Жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруы үшін әртүрлі бағалаулар алынды; жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастырулары арқылы құрастырылған монотонды функциялардың әртүрлі конустары қарастырылды. Жалпыланған бөлшекті-максималды функция мен жалпыланған Рисс потенциалы арасында салыстыру жүргізілді; жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруынан туындаған конустар мен жалпыланған Рисс потенциалының өспейтін алмастыруынан туындаған конустар арасында салыстыру жүргізілді.

**Екінші бөлімде** жалпыланған бөлшекті-максималды функциялар кеңістігін ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктерге енгізу критерийі алынды. Мұндай енгізу үшін оңтайлы ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктің сипаттамасы берілді; Лоренц кеңістігінің негізінде құрылған жалпыланған бөлшекті-максималды функциялар кеңістігін ауыстырмалы-инварианттық кеңістікке оңтайлы енгізу алынды. Салмақты Лоренц кеңістігінде супремальды оператордың шенелген болуының шарттары алынды.

Енді диссертацияның бөлімдерінің қысқаша мазмұнына тоқталайық.

**1.1-бөлімшеде** жұмыста қолданылатын анықтамалар мен белгілеулер келтірілген. Функционалдық норманың, функцияның өспейтін алмастыруының және ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктің анықтамалары берілген, ол ұғымдар C. Bennet, R. Sharpley, S.G. Krein, Yu.I. Petunin, E.M. Semenov кітаптарынан алынған. Осы жұмыс барысында біз C. Bennet, R. Sharpley [40] кітабында енгізілген аксиоматиканы ұстанамыз.

Айталық, өлшемі бар кеңістік болсын. Мұндағы – -шекті, -аддитивті теріс емес өлшемі анықталған жиынының ішкі жиындарының -алгебрасы. арқылы өлшемді нақты мәнді функциялар жиынын, ал деп жиынының теріс емес функциялардан тұратын ішкі жиыншасын белгілейміз:

*Анықтама 1.1.1*[40, р. 2]. бейнелеуі функционалдық норма (қысқаша: ФН) деп аталады, егер келесі шарттар барлық , үшін орындалса:

(P1) , - барлық жерде дерлік (қысқаша: - б.ж.д.).

, ; (норманың қасиеттері).

(P2) , -б.ж.д. (норманың монотондылығы).

(P3) (Фату қасиеті).

(P4) , (локальды интегралдану).

(P5) (ақырлы өлшемді жиындардың сипаттамалық функциясы үшін функционалдық норманың ақырлығы).

Мұндағы келесіні білдіреді: , (- б.ж.д.).

Функционалдық нормаға мысал ретінде кеңістігіндегі норманы келтіруге болады:

үшін [40, р. 3]

*Анықтама 1.1.2*[40, р. 3]. Айталық, функционалдық норма болсын. болатын -дегі функциялар жиыны функционалдық нормасынан туындаған банах функционалды кеңістігі (қысқаша: БФК) деп аталады. үшін:

Бізді функциялардың өспейтін алмастыруларымен байланысқан реттік қатынастар қызықтырады. үшін

,

- Лебег үлестірім функциясы.

үшін өспейтін алмастыруын өспейтін функциясына оң кері функция ретінде енгізейік, яғни

, (1)

функцияның өспейтін алмастыруы, жиынында теріс емес, өспейтін, оң жақты үзіліссіз, функциясымен тең өлшемді функция:

, ,

мұндағы -Лебег өлшемі (-дегі немесе -тегі, сәйкесінше, [40, р. 37]).

функциясы келесідей анықталады

функциясы -те кемімейтінін ескереміз.

*Анықтама 1.1.4* [40, р. 59]. функционалдық нормасы (1) реттік қатынасқа сәйкес келсе, ауыстырмалы-инвариантық деп аталады, яғни

ауыстырмалы-инварианттық функционалдық нормасынан туындаған БФК ауыстырмалы-инварианттық кеңістік деп аталады

Ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктің мысалдары Лебег кеңісті, Лоренц және Орлич кеңістіктері болып табылады.

*Анықтама 1.1.5* [41]. кеңістігі келесі шарттарды қанағаттандырса, идеалды кеңістік деп аталады:

(B1) , –б.ж.д., , ;

; (2)

(B2) ;

(B3) ;

(B4) .

(2) үшбұрыш теңсіздігінде болса, онда нормаланған кеңістік және болса квазинормаланған кеңістік болады.

БФК (В1)-(В3) қасиеттерді (2) теңсіздіктегі болғанда қанағаттандырады, (B4) қасиеті неғұрлым қатаң болжаммен ауыстырылады:

(B4') , .

және қосымша қасиет орындалады:

(B5) , .

Сондықтан идеалды кеңістік ұғымы Банах функционалды кеңістігінің ұғымынан кеңірек.

*Анықтама 1.1.6* [30, р. 3]. идеалды кеңістігі жалпыланған ауыстырмалы-инварианттық кеңістік (қысқаша: ЖАИК) деп аталады, егер келесі қосымша шарттар орындалса:

1. (Квази)норма тек функциялардың симметриялы алмастыруына тәуелді: атап айтқанда

,

2. қосымша қасиетке ие:

(P6) *, ,*

(P7) *, ; ,* .

мұндағы жалпыланған ауыстырмалы-инварианттық кеңістігі үшін фундаменталды функция деп аталады, ал - кеңейту операторы.

Біз -дегі және -дегі ішкі кеңістікті қарастырамыз,  Лоренц типтес кеңістіктің жалпыланған нұсқасы, сәйкесінше:

ауыстырмалы-инварианттық кеңістігі үшін деп ассоцирленген ауыстырмалы-инварианттық кеңістікті белгілейміз, яғни, нормасы келесі қатынас арқылы берілетін ауыстырмалы-инварианттық кеңістік

ал, арқылы Люксембург өрнектеуін белгілейміз:

.

өрнектеу ядросын мүмкін болатын деп атаймыз, егер

.

*Теорема 1.1.А.* Айталық функционалдық норма, ал ассоцирленген норма болсын,

онда функционалдық норма болып табылады және нормасы бар Банах функционалды кеңістігі болады:

,

оған қоса және Банах функционалды кеңістіктері болады және олар үшін екіжақтылық принципі орындалады

,

мұнда кеңістігі ассоцирленген кеңістік деп аталады.

Айталық, барлық теріс емес, -те ақырлы, кемімелі және оң жақты үзіліссіз функциялардың жиыны болсын:

1.2 бөлімшеде жалпыланған бөлшекті-максималды функция анықталған.

*Анықтама 1.2.1* [42]. Айталық, болсын. функциясы үшін жалпыланған бөлшекті-максималды функциясы келесі түрде анықталады:

мұндағы – центрі нүктесінде және радиусы болатын ашық шар.

Егер дәрежелік функция болса, яғни, , болса, онда классикалық бөлшекті-максималды функциясымен сәйкес келеді:

үшін классикалық Харди Литлвуд максималды функциясын аламыз [7, р. 95]:

Осылайша, жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның анықтамасында қолданылатын функциясы классикалық бөлшекті-максималды функция сияқты дәрежелік функция болмауы да мүмкін. Осыған байланысты біз өспейтін функциялардың үш класын қарастырамыз.

*Анықтама 1.2.2.* функциясы үшін қандай да бір саны табылып, келесі теңсіздік орындалса

онда, функциясы жиынында квази-кемімелі деп аталады және деп белгіленеді (квази-өспелі және арқылы белгіленеді).

Осы жұмыс барысында біз , , арқылы жалпы айтқанда, әр жерлерде әртүрлі болатын оң тұрақтыларды белгілейміз.

белгілеу арқылы , тұрақтылары бар екенін білдіреміз

*Анықтама 1.2.3* [42, р. 14]. Айталық және болсын. функциясы келесі екі шартты қанағаттандырса,

1. кемімелі және аралығында үзіліссіз;
2. функциясы аралығында квазиөспелі,

онда функциясы класына жатады дейміз (белгілеуі: ).

Мысалы, , *.*

*Анықтама 1.2.4* [42, р. 15]. Айталық және болсын. функциясы класына жатады дейміз, егер келесі шарттар орындалса:

1. Φ кемімелі және аралығында үзіліссіз;
2. тұрақтысы табылып, келесі теңсіздік орындалса

*Анықтама 1.2.5* [42, р. 15]*.* Айталық, болсын. функциясы класына жатады дейміз, егер қандай да бір үшін келесі

теңсіздігі орындалса, (3) теңсіздік келесі (4) теңсіздікке эквивалентті:

*Лемма 1.2.1* [42, р. 16].Айталық , болсын. Онда .

Мысалы, функциясы болған жағдайда класына жатады, ал *.*

Айталық ауыстырмалы инвариантты кеңістік болсын. Біз жалпыланған бөлшекті-максималды функциялар кеңістігін төмендегідей анықтаймыз:

яғни, әрбір үшін келесі теңдік

орындалатындай функциясы табылады. Бұл кеңістікте норманы келесідей анықтаймыз:

1.3 бөлімшеде жалпыланған бөлшекті-максималды функция жалпыланған Рисс потенциалымен салыстырылады.

Классикалық Рисс потенциалы келесі теңдікпен анықталады

М.Л. Гольдманның жұмыстарында -өлшемді евклидтік кеңістіктегі потенциалдар кеңістігі зерттеледі:

(5)

Жалпы жағдайда (5) өрнек потенциалды үшін бірегей болмауы мүмкін, сондықтан нормасы келесі формуламен анықталады

,

мұнда төменгі шекара потенциалы үшін (5) түрде берілген барлық өрнектеулер бойынша алынады (фактор-норма).

иірімі интеграл ретінде анықталады

(Фурье түрлендіруін пайдалану кезінде ыңғайлы болу үшін біз мұнда көбейткішін енгіздік).

Жұмыста негізінен жалпыланған Бессель және Рисс потенциалдары үшін ауыстырмалы-инварианттық кеңістікте енгізу теоремалары дәл орнатылған М.Л. Гольдманның жұмыстарының нәтижелерін қолданамыз:

.

Айта кетейік, М.Л. Голдман, Е.Г. Бахтигареева, Н.А. Бокаев, Г.Ж. Каршыгина еңбектерінде жалпыланған Рисс потенциалы иірім операторы арқылы қарастырылды:

мұнда ядросы келесі шартды қанағаттандырады:

Классикалық Рисс потенциалының ядросы дәрежелік функция болғанда шығады:

Жалпыланған бөлшекті-максималды операторының операторынан айырмашылығы, операторы сызықты емес.

Келесі леммада жалпыланған бөлшекті-максималды функция жалпыланған Рисс потенциалы арқылы жоғарыдан бағаланатыны дәлелденеді.

*Лемма 1.3.1* [42, р. 17].Айталық және болсын. Онда барлық үшін келесі теңсіздік орындалады:

, .

1.4-бөлімшеде функциясының әртүрлі кластарда жатуына байланысты жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруының бағалаулары алынған.

A.Cianchi, R.Kerman, B.Opic, L.Pick еңбектерінде классикалық бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруы үшін келесі бағалау алынды:

.

және бұл бағалаудың функциясының класында жақсартуға болмайтыны дәлелденді.

Келесі теоремаларда функциясының әртүрлі кластарға қатысты болуына байланысты жалпыланған бөлшекті-максималды функциясының өспейтін алмастыруының жоғарыдан әртүрлі бағалаулары алынды.

*Теорема 1.4.1* [42, р. 17].Айталық, болсын. Онда тек және -нен тәуелді оң тұрақты табылып, келесі теңсіздік

(6)

кез келген үшін орындалады.

*Теорема 1.4.2* [42, р. 18]. Айталық болсын. (6) теңсіздік әрбір үшін дәл болады, яғни, барлық жерде дерлік (0,∞) жиынында орындалатындай функциясы бар болады және келесі теңсіздік орындалады

,

мұнда тек және -нен тәуелді болатын оң тұрақты.

*Ескерту 1.4.1.* , үшін бөлшекті-максималды операторы үшін 1.4.1 және 1.4.2 теоремалар [43] жұмыста дәлелденген.

Келесі теоремада класында жатқанда жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруының 1.4.1 теоремасының бағалауынан жақсырақ бағалауы алынады (өйткені , Лемма 1.1.1 қараңыз).

*Теорема 1.4.3* [42, р. 18]. Айталық болсын. Онда тек және -нен тәуелді болатын оң тұрақтысы табылып, барлық үшін келесі теңсіздік орындалады:

. (7)

*Ескерту 1.4.2.* Лемма 1.3.1 бойынша

,

теңсіздігі орындалады. Сондықтан жалпыланған Рисс потенциалы арқылы жоғарыдан бағалаулар жалпыланған бөлшекті-максималды функция үшін де орындалады. Бірақ, 1.4.3 теоремасында алынған бағалау жалпыланған Рисс потенциалы үшін белгілі жоғарыдан бағалаудан жақсырақ екенін көрсетуге болады.

Шынында да, иірімнің өспейтін алмастыруы үшін жалпыланған Рисс потенциалы O’Neil [44] бағалауын қанағаттандыратыны белгілі

мұнда тек және -ге тәуелді.

Содан кейін Лемма 1.3.1 бойынша және -ге тәуелді қандай да бір үшін келесі теңсіздікті

аламыз.

жағдайында (7) бағалау (8) бағалаудан жақсырақ екені көрсетілді.

*Теорема 1.4.4* [42, р. 18]. Айталық, болсын. Әрбір функциясы үшін тек және -ге тәуелді саны табылып, төмендегі теңсіздік орындалады

Бұл теоремаларды дәлелдеу кезінде келесі леммалар қолданылады.

*Лемма 1.4.1.* Айталық, . Онда кез келген үшін

теңсіздігі орындалады, мұндағы тек және -ге ғана тәуелді.

*Лемма 1.4.2.* Айталық оң, өлшемді, аралығында өспейтін функция болсын. Онда келесі теңсіздік орын алады:

1.5-бөлімшеде жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруынан туындаған монотонды өспейтін функциялардың 4 түрлі конустары қарастырылады.

Функциялардың өспейтін алмастыруымен байланысты әртүрлі конустар тұрғызылған және мұндай конустардың өзара бүркеу мәселелері зерттелген. Жалпыланған бөлшекті-максималды функциялардың кеңістігін ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктерге енгізу шарттары алынған. Мұндай енгізу үшін оңтайлы ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктің сипаттамасы берілген.

*Анықтама 1.5.1* [31, р. 824]. үшін арқылы оң біртекті функционалдармен жабдықталған аралығында өлшенетін теріс емес функциялардан тұратын келесі қасиеттерге ие конустар жиынын анықтаймыз:

1) , , ;

2) барлық жерде дерлік .

*Анықтама 1.5.2*. Айталық, , болсын. конусы конусын бүркейді деп атаймыз(белгілеуі: ) егер және болатын сандары табылып, кез келген үшін бар болып мынадай теңсіздіктер орындалса:

Конустар эквивалентті деп атаймыз егер

шарттары орындалса.

Айталық, ауыстырмалы-инварианттық кеңістік болсын. Жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруынан құрылған біртекті функционалдармен жабдықталған 4 түрлі конустарды қарастырамыз:

(9)

(10)

(11)

Келесі теорема , , конустарының эквивалентті сипаттамасын береді.

*Теорема 1.5.1.* Айталық, болсын. Осы класста (9), (10), (11) конустары эквивалентті:

*Теорема 1.5.2.*

1) айталық, болсын. Онда

2) егер болса, онда

3) егер болса, онда

*Салдар 1.5.1.* Егер болса, онда

1.5.1 салдар 1.5.1 теоремадан және 1.5.2 теоремадан шығады.

1.6. бөлімшеде жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруынан туындаған конустар және жалпыланған Рисс потенциалының өспейтін алмастыруынан туындаған конустарды салыстыру қарастырылады.

М.Л. Голдманның [31, р. 818] және басқа да авторлардың еңбектерінде [35, р. 43] жалпыланған Рисс потенциалының өспейтін алмастыруынан туындаған конустар қарастырылған. Олар -өлшемді евклидтік кеңістікте жалпыланған Рисс потенциалының кеңістігін зерттейді:

мұнда ауыстырмалы-инвариантты кеңістік. Бұл жұмыстарда оң біртекті функционалдармен жабдықталған жалпыланған Рисс потенциалының өспейтін алмастыруынан туындаған конустар қарастырылды:

үшін

Сонымен қатар, [31, р. 823] жұмыста оң біртекті функционалмен жабдықталған келесі конус қарастырылған

мұнда

. (12)

Төмендегі теоремада жалпыланған бөлшекті-максималды функциядан туындаған конус пен жалпыланған Рисс потенциалынан туындаған конустың салыстыруы көрсетілген.

*Теорема 1.6.1* [45]. Айталық, болсын және ядросы шартын қанағаттандырсын. Онда .

Екінші бөлімде жалпыланған бөлшекті-максималды функциялар кеңістігінің ауыстырмалы-инвариантты кеңістікке енгізу мәселелері қарастырылды.

2.1 бөлімшеде жалпыланған бөлшекті-максималды функциялар кеңістігінің ауыстырмалы-инвариантты кеңістікке енгізу критерийлері алынды.

Айталық, , – оң біртекті функционалдарымен жабдықталған аралығында өлшенетін функциядан тұратын конустар жиыны болсын (1.5.1 анықтаманы қараңыз). – ауыстырмалы-инвариантты кеңістік, – олардың Люксембург өрнектеуі болсын.

*Анықтама 2.1.1.* Айталық, конус болсын. Онда енгізуі

1) білдіреді;

2) қандай да бір саны табылып келесі теңсіздік орындалатынын білдіреді

*Лемма 2.1.1* [31, р. 824]. Айталық, болсын. Әрбір Банах функциялық кеңістігі үшін, егер болса, онда .

*Салдар 2.1.1*. Айталық, болсын. Егер болса, онда .

жалпыланған бөлшекті-максималды функциялар кеңістігінің ауыстырмалы-инварианттық кеңістікке енгізу критерийлерін қарастырайық:

(13)

*Анықтама 2.1.2.* Айталық, - ауыстырмалы-инвариантты кеңістік болсын. (13) енгізуі үшін оңтайлы ауыстырмалы-инварианттық кеңістік дегеніміз және егер (13) енгізуі қандай да бір басқа ауыстырмалы-инварианттық кеңістігі үшін орындалса, онда .

*Теорема 2.1.1* [45, р. 60]. Егер болса, онда (13) енгізу төмендегідей енгізуге эквивалентті болады

Келесі салдар 2.1.1.-теоремадан және 2.1.1-салдардан шығады.

*Салдар 2.1.2.*

1) айталық болсын. Онда

2) айталық болсын. Онда

операторын келесі түрде енгізейік:

мұндағы , бұл жердегі жиыны (12) өрнекте анықталған.

*Теорема 2.1.2.* 1Айталық, болсын. Онда

енгізуі операторының -тен -ке шенелгендігіне эквивалентті.

2.2-бөлімшеде енгізуі үшін оңтайлы ауыстырмалы-инвариантты кеңістігі сипатталады.

*Анықтама 2.2.1.* Айталық - ауыстырмалы-инвариантты кеңістік болсын. (13) енгізуі үшін оңтайлы ауыстырмалы-инварианттық кеңістік дегеніміз орындалатындай ауыстырмалы-инварианттық кеңістік және егер (13) енгізу басқа ауыстырмалы-инварианттық кеңістігі үшін орындалса, онда . Мұндай оңтайлы ауыстырмалы-инварианттық кеңістік бөлшекті-максималды функциялар кеңістігінің ауыстырмалы-инвариантты қабықшасы деп аталады.

Әрі қарай бізге келесі нәтиже қажет.

*Теорема 2.2.1.* Айталық, болсын. Егер ауыстырмалы-инвариантты кеңістігі

енгізуі үшін оңтайлы кеңістік болса, онда оның элементтерінің нормасы келесі эквивалентті нормамен анықталады (Люксембург өрнектеуі мағынасында):

Бұл теореманың дәлелдеуінде Г.Синнамонның [46] келесі нәтижесі пайдаланылады.

*Теорема 2.2.2* [46, p. 188]. Айталық, болсын. Онда

2.3 бөлімшеде өлшемді интегралдық теңсіздіктің сипаттамасы берілген.

Келесі теңсіздік орындалуы үшін қажетті және жеткілікті шарттар алынды

2.4-бөлімшеде жалпыланған бөлшекті-максималды функциясының өлшемді Лоренц кеңістігінен өлшемді Лоренц кеңістігіне шенелгендігін қамтамасыз ететін және салмақты функциялары үшін шарттар алынған . Классикалық бөлшекті-максималды функция үшін мұндай нәтиже [8, р. 59-89] еңбекте алынған.

Харди-Литтлвуд классикалық максималды операторы үшін

ауыстырмалы теңсіздігі орындалады ([40, р. 122]).

Айталық және аралығындағы теріс емес өлшемді функциясы берілген болсын, классикалық өлшемді Лоренц кеңістігі -дегі барлық өлшемді функциялардың жиыны болады және

ақырлы болады [40, р. 216].

Айталық, функциясы бойынша өлшемді және теріс емес болсын және өлшемді Лебег кеңістіктері

болатын бойынша өлшемді барлық функцияларының кеңістігі болсын.

Төмендегі теорема осы жұмыстың негізгі нәтижесі болып табылады.

*Теорема 2.4.1.* Айталық, , , және – аралығында теріс емес және өлшенетін функциялар болсын. жалпыланған бөлшекті-максималды операторы -дан -ге шенелген болады сонда және тек сонда, егер оң тұрақтысы бар болып, келесі теңсіздіктер

барлық үшін орындалса.

Классикалық бөлшекті-максималды оператор үшін 2.4.1-теорема [42, р. 13-22] жұмыста дәлелденді.

*Лемма 2.4.1*. Айталық , болсын және функциялары теріс емес және өлшемді функциялар болсын. функциясы әрбір үшін шартын қанағаттандырсын. Онда оң тұрақтысы табылып, әрбір үшін келесі теңсіздік орындалады, сонда және тек сонда, егер келесі теңсіздік орындалатын болса

(2.4.2)

Автор отандық ғылыми кеңесші – физика-математика ғылымдарының докторы, Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ профессоры Боқаев Нұржан Әділханұлына және шетелдік ғылыми кеңесші – PhD доктор, Чехия ғылым Академиясының Математика институтының жетекші ғылыми қызметкері Гогатишвили Амиранға есептер қойып, қолдау қолдау көрсетіп және жұмысқа тұрақты назар аударғандары үшін алғыс білдіреді.

# 1 АУЫСТЫРМАЛЫ-ИНВАРИАНТТЫҚ КЕҢІСТІКТЕР НЕГІЗІНДЕ ҚҰРЫЛҒАН ЖАЛПЫЛАНҒАН БӨЛШЕКТІ-МАКСИМАЛДЫ ФУНКЦИЯЛАР КЕҢІСТІГІ

**1.1 Банах функционалды кеңістіктері, ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктер**

Бұл бөлімшеде берілген жұмыста қолданылатын анықтамалар мен белгілеулер келтіріледі. Функционалдық норманың, функцияның өспейтін алмастыруының және ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктің анықтамалары берілген, ол ұғымдар C. Bennet, R. Sharpley, S.G. Krein, Yu.I. Petunin, E.M. Semenov кітаптарынан алынған. Осы жұмыс барысында біз кітапта енгізілген аксиоматиканы ұстанамыз.

Айталық өлшемі бар кеңістік болсын. Мұндағы – -шекті, -аддитивті теріс емес өлшемі анықталған жиынының ішкі жиындарының алгебрасы. арқылы өлшемді нақты мәнді функциялар жиынын, ал деп жиынының теріс емес функциялардан тұратын ішкі жиыншасын белгілейміз:

*Анықтама 1.1.1*[40, р. 2]. бейнелеуі функционалдық норма (қысқаша: ФН) деп аталады, егер келесі шарттар барлық үшін орындалса:

(P1) , – барлық жерде дерлік (қысқаша: – б.ж.д.);

(норманың қасиеттері);

(P2) б.ж.д.) (норманың монотондылығы);

(Фату қасиеті);

(P4) (локальды интегралдану);

(P5) (ақырлы өлшемді жиындардың сипаттамалық функциясы үшін функционалдық норманың ақырлығы).

Мұндағы келесіні білдіреді:

Функционалдық нормаға мысал ретінде кеңістігіндегі норманы келтіруге болады

үшін [40, р. 3]

*Анықтама 1.1.2* [40, р. 3]**.** Айталық функционалдық норма болсын. болатын -дегі функциялар жиыны функционалдық нормасынан туындаған банах функционалды кеңістігі (қысқаша: БФК) деп аталады. үшін

-те эквиваленттік пен жартылай реттілік қатынастары енгізілсін:  транзитивтік қасиеттерімен, яғни ,

Біз реттік қатынас б.ж.д. нүктелік бағалауға бағынады деп есептейміз, яғни,

б.ж.д. 2)

мұндағы дегеніміз білдіреді, яғни, және егер болса, онда .

Реттік қатынасының негізгі мысалы:

бұл функционалдық норманың Р2 қасиетінен шығады.

мұндағы дегеніміз білдіреді, яғни, және егер , болса, онда .

Бізді функциялардың өспейтін алмастыруларымен байланысқан реттік қатынастар қызықтырады. үшін

- Лебег үлестірім функциясы.

арқылы шексіздікке тең болмайтындай функциялар жиынын белгілейміз, яғни .

үшін өспейтін алмастыруын өспейтін функциясына он кері функция ретінде енгізейік, яғни

– функциясының өспейтін алмастыруы, жиынында теріс емес, өспейтін, оң жакты үзіліссіз, функциясымен тең өлшемді функция:

мұндағы -Лебег өлшемі (сәйкес -дегі немесе -тегі [40, р. 37]).

функциясы келесідей анықталады

функциясы -те кемімейтінін ескереміз.

*Мысал 1.1.1**[40, р. 38]*. Қарапайым функцияны қарастырайық,

жиындары соңғы өлшемге ие болған кезде, жұптаспайды.

мұнда

және және . кезінде бар ең кіші үшін екенін ескеру керек. Сол сияқты, үшін, кезіндегі ең кіші мәні . Осылайша көре аламыз:

Төменде жұмыс барысында қажет болатын функцияның өспейтін ауыстыруының және үлестірім функциясының қасиеттері берілген.

*Лемма 1.1.**А* [47]. Айталық -өлшемді функциялар, және болсын. Онда

1. егер ;
2. ;
3. , егер , яғни, ;
4. , онда және ;
5. ;
6. ;
7. ;
8. болса, онда ;
9. болса, онда ;
10. функциясы үшін оң жақты үзіліссіз;
11. , егер , кейбір үшін;
12. ;
13. , егер ;
14. , егер ;
15. ;
16. , егер .

үшін жиынында:

-тегі функциялар үшін реттік қатынастарды анықтайық:

(1.1.2)

(1.1.2) қатынас және өспейтін алмастыруларының бағалауы, (1.1.3) қатынас және өспейтін алмастыруларының интегралдарына арналған бағалауы -б.ж.д. нүктелік мәнге бағынады, сонымен қатар (1.1.3) реттік қатынасы (1.1.2) қатынасқа бағынады.

функциясы келесі түрде анықталады

мұндағы өспейтін алмастыруы (1.1.1) белгілеуде көрсетілген.

*Лемма 1.1.1.*1) функциясы жиынында кемімейтін функция болады.

2) Сонымен қатар , теңсіздігі орындалады.

*Дәлелдеу*:

1) шынында да, үшін

Демек,

2) . Расында да, монотонды өспейтін болғандықтан,

*Анықтама 1.1.3.* Айталық, функционалдық норма болсын. реттік қатынасқа ≺ сәйкес деп айтамыз егер , үшін

(P2) қасиеті бойынша кез келген функционалдық норма нүктелік бағалауға сәйкес келетінін ескереміз:

*Анықтама 1.1.4* **[**40, р. 59**]**. функционалдық нормасы (1.1.3) реттік қатынасқа сәйкес келсе, ауыстырмалы-инварианттық деп аталады, яғни

ауыстырмалы-инварианттық функционалдық нормасынан туындаған банах функционалды кеңістігі ауыстырмалы-инварианттық кеңістік деп аталады

Ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктің мысалдары: Лебег кеңісті, Лоренц және Орлич кеңістіктері болып табылады.

Айталық, болсын. Лоренц кеңістігі нормасы ақырлы болатын өлшемді функциялар жиыны ретінде анықталады

*Анықтама 1.1.5* [41]. кеңістігі келесі шарттарды қанағаттандырса, идеалды кеңістік деп аталады:

(B1) , –б.ж.д., , ;

; (1.1.5)

(B2) ;

(B3) ;

(B4) .

(2) үшбұрыш теңсіздігінде болса, онда нормаланған кеңістік және болса квазинормаланған кеңістік.

БФК (В1)-(В3) қасиеттерді (1.1.5) теңсіздіктегі болғанда қанағаттандырады, (B4) қасиеті неғұрлым қатаң болжаммен ауыстырылады:

(B4') , ;

және қосымша қасиет орындалады:

(B5) , .

Сондықтан идеалды кеңістік ұғымы Банах функционалды кеңістігінің ұғымынан кеңірек.

*Анықтама 1.1.6*[30, р. 3]. идеалды кеңістігі жалпыланған ауыстырмалы-инварианттық кеңістік (қысқаша: ЖАИК) деп аталады, егер келесі қосымша шарттар орындалса:

1. (Квази)норма тек функциялардың симметриялы алмастыруына тәуелді, атап айтқанда

,

2. қосымша қасиетке ие:

(P6) *, ;*

(P7) *, ; ,* ,

мұндағы жалпыланған ауыстырмалы-инварианттық кеңістігі үшін фундаменталды функция деп аталады, ал - кеңейту операторы.

Біз -дегі және -дегі ішкі кеңістікті қарастырамыз,  Лоренц типтес кеңістіктің жалпыланған нұсқасы, сәйкесінше:

,

М.Л. Гольдманның жұмыстарында -өлшемді евклидтік кеңістіктегі потенциалдар кеңістігі зерттеледі:

(1.1.6)

мұнда иірімі интеграл ретінде анықталады

Жалпы жағдайда (1.1.6) өрнек потенциалды үшін бірегей болмауы мүмкін, сондықтан нормасы келесі формуламен анықталады

,

мұндағы төменгі шекара потенциалы үшін (1.1.6) түрде берілген барлық өрнектеулер бойынша алынады (фактор-норма).

Жұмыста негізінен жалпыланған Бессель және Рисс потенциалдары үшін ауыстырмалы-инварианттық кеңістікте енгізу теоремалары дәл орнатылған М.Л. Гольдманның жұмыстарының нәтижелерін қолданамыз:

.

ауыстырмалы-инварианттық кеңістігі үшін деп ассоцирленген ауыстырмалы-инварианттық кеңістікті белгілейміз, яғни, нормасы келесі қатынас арқылы берілетін ауыстырмалы-инварианттық кеңістік

ал, арқылы Люксембург өрнектеуін белгілейміз:

. (1.1.7)

өрнектеу ядросын мүмкін болатын деп атаймыз, егер

.

*Теорема 1.1.**А.*[40, р. 23]. Айталық функционалдық норма, ал ассоцирленген норма болсын:

.

онда функционалдық норма болып табылады және нормасы бар Банах функционалды кеңістігі болады:

,

оған қоса және Банах функционалды кеңістіктері болады және олар үшін екіжақтылық принципі орындалады

,

мұндғы кеңістігі ассоцирленген кеңістік деп аталады.

**1.2 Жалпыланған бөлшекті-максималды функция және жалпыланған бөлшекті-максималды функция кеңістіктері**

функциясы үшін классикалық бөлшекті-максималды функциясы келесідей анықталады:

мұндағы – центрі нүктесінде және радиусы болатын ашық шар.

жағдайында классикалық Харди Литлвуд максималды функциясын аламыз [7, р. 95]:

мұнда дегеніміз кеңістігіндегі шардың көлемі.

Жоғарыдағы классикалық бөлшекті-максималды функцияның формуласындағы дәрежелік функциясының орнына кез келген монотонды өспейтін функциясын қарастырып, жалпыланған бөлшекті-максималды функция ұғымын енгіземіз.

*Анықтама 1.2.1*[42, р. 16]. Айталық, болсын. функциясы үшін жалпыланған бөлшекті-максималды функциясы келесі түрде анықталады

мұндағы – центрі нүктесінде және радиусы болатын ашық шар.

Басқа түрдегі бөлшекті-максималды функция [8, р. 60; 21, р. 740; 43, р. 277] жұмыстарда қарастырылғанын ескереміз.

Осылайша, жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның (ЖБМФ) анықтамасынан пайда болатын функциясы классикалық бөлшекті-максималды функция сияқты дәрежелік функция болмауы мүмкін. Осыған байланысты біз өспейтін функциялардың үш класын қарастырамыз.

*Анықтама 1.2.2.* функциясы үшін қандай да бір саны табылып, келесі теңсіздік орындалса:

онда, функциясы жиынында квази-кемімелі деп аталады және деп белгіленеді (квази-өспелі және арқылы белгіленеді).

Осы жұмыс барысында біз , , арқылы жалпы айтқанда, әр жерлерде әртүрлі болатын оң тұрақтыларды белгілейміз.

белгілеу арқылы , тұрақтылары бар екенін білдіреміз

*Анықтама 1.2.3* [42, р. 14]. Айталық және болсын. функциясы келесі екі шартты қанағаттандырса,

1. кемімелі және аралығында үзіліссіз;
2. функциясы аралығында квазиөспелі,

онда функциясы класына жатады дейміз (белгілеуі: ).

Мысалы, , *.*

*Анықтама 1.2.4* [43, р. 15]. Айталық және болсын. функциясы класына жатады дейміз, егер келесі шарттар орындалса:

1) Φ кемімелі және аралығында үзіліссіз;

2) тұрақтысы табылып, келесі теңсіздік орындалса

*Мысал 1.2.1.* .

Шынында да

1) кемімелі және аралығында үзіліссіз;

2)

яғни, .

*Мысал 1.2.2.* . Бұл мысалды жағдайында дәлелдеп көрсетейік. класының анықтамасы бойынша:

1) функциясы кемімелі және аралығында үзіліссіз функция болады;

2)

Әрі қарай интегралды табудың бөліктеп интегралдау

формуласын қолдану арқылы интеграл астындағы функцияны екі көбейткішке жіктеуге болады:

Біз функциясының жағдайында класында жататынын көрсеттік: . Демек, функциясы класында да жатады: .

үшін келесі бағалау орындалады

үшін келесі бағалау да орындалады

(1.2.3)

(1.2.3)-тен кез келген ) үшін саны бар болатыны шығады (мұндағы С тұрақтысы (1.2.1) теңсіздігінің тұрақтысы) [31, р. 821]:

*Анықтама 1.2.5* [42, р. 15]. Айталық, болсын. функциясы класына жатады дейміз, егер қандай да бір үшін келесі теңсіздік орындалса

(1.2.5) қатынасы келесі теңсіздікке эквивалентті:

Шынында да, айнымалыны алмастыру арқылы келесі теңдікті аламыз

Мысалы, функциясы. Расында да,

*Лемма 1.2.1* [42, р. 16].Айталық , болсын. Онда .

*Дәлелдеу*. Айталық, және болсын. (1.2.2) бойынша және -ге тәуелді қандай да бір тұрақтылары үшін

сондықтан функциясы квазиөспелі, демек .

функциясы болған жағдайда класына жатады, ал . Расында да,

*Лемма 1.2.1 дәлелденді.*

Айталық ауыстырмалы инвариантты кеңістік болсын. Біз жалпыланған бөлшекті-максималды функциялар кеңістігін төмендегідей анықтаймыз:

яғни, әрбір үшін келесі теңдік

орындалатындай функциясы табылады. Бұл кеңістікте норманы келесідей анықтаймыз:

(1.2.7)

**1.3 Жалпыланған бөлшекті-максималды функцияны жалпыланған Рисс потенциалымен салыстыру**

Бұл бөлімшеде жалпыланған бөлшекті-максималды функция жалпыланған Рисс потенциалымен салыстырылады.

Классикалық Рисс потенциалы келесі теңдікпен анықталады

Айта кетейік, М.Л. Гольдман, Е.Г. Бахтигареева, Н.А. Бокаев, Г.Ж. Каршыгина еңбектерінде жалпыланған Рисс потенциалы иірім операторы арқылы қарастырылған:

мұнда ядросы келесі шартты қанағаттандырады:

(1*.*3*.*1)

Классикалық Рисс потенциалының ядросы:

операторының операторынан айырмашылығы, операторы сызықты емес.

Жоғарыда аталған жұмысарда -өлшемді евклид кеңістігіндегі жалпыланған потенциалдар кеңістігі зерттелген:

мұнда – ауыстырмалы-нварианттық кеңістік.

Келесі леммада жалпыланған бөлшекті-максималды функция жалпыланған Рис потенциалы арқылы жоғарыдан бағаланатынын дәлелдейміз.

*Лемма 1.3.1.* Айталық, және болсын. Онда барлық үшін келесі теңсіздік орындалады:

, . (1.3.2)

*Дәлелдеу*. Расында да,

**1.4 Жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруын бағалау**

1.4-бөлімшеде функциясының әртүрлі кластарда жатуына байланысты жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруының бағалаулары алынған.

A. Cianchi, R. Kerman, B. Opic, L. Pick [43, р. 278] еңбектерінде классикалық бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруы үшін келесі бағалау алынды:

,

бұл бағалаудың функциясының класында жақсартуға болмайтыны дәлелденді.

Осы бөлімшеде біз жағарыдағыдай теңсіздіктерді жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруы үшін қарастырамыз. Алдымен көмекші леммаларды келтіріп алайық.

*Лемма 1.4.А*[40, р. 45]. Егер және функциялары -де жатса, онда

Келесі леммада жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның супремалды функция арқылы жоғарыдан бағалауы алынған.

*Лемма 1.4.1*[42, р. 17]. Айталық, , болсын. Онда барлық үшін келесі теңсіздік орындалады

мұндағы тұрақтысы тек қана және -ге тәуелді.

*Дәлелдеу*. Лемма 1.4.А және (1.2.4) қолдану арқылы келесі өрнекті аламыз

мұнда , – кеңістігіндегі бірлік шардың көлемі.

Әрі қарай алмастыруын жасап және (1.1.4) пайдаланып келесі теңсіздікті аламыз

мұнда тұрақтысы тек қана және -ге тәуелді.

Келесі леммада жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруының функциясының интегралы арқылы жоғарыдан бағалауы алынған.

*Лемма 1.4.2*[48]. Айталық, функциясы оң, өлшемді, аралығында өспейтін функция болсын. Сонда келесі теңсіздік орын алады:

*Дәлелдеу*. Айталық, болсын. Келесі жиынды қарастырайық

Сонда әрбір нүктесі үшін келесі шарт орындалатындай шарын таба аламыз:

шарлар жиыны шенелген жиындарын бүркейді. Содан бүркеулер туралы Виталий леммасы бойынша ([40, р. 118]) және , жұптық өзара қиылыспайтын шарлар тізбегі табылып, келесі теңсіздік орындалады

функциясының қасиеттерінен оның аймағында ойыс екендігі шығатынын ескереміз. Демек, функциясы

үшін келесі теңсіздік орындалады:

Демек,

Сонымен, біз кез келген үшін бағалау бар екенін алдық:

Сондықтан

және бұл келесі өрнекке тең

демек, (1.4.1) теңсіздік орын алады. Лемма 1.4.2 дәлелденді.

Келесі теоремада жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруының жоғарыдан супремалды оператормен бағалауы алынады.

*Теорема 1.4.1*[42, р. 17].Айталық, болсын. Онда тек және -нен тәуелді оң тұрақты табылып, келесі теңсіздік

(1.4.4)

кез келген үшін орындалады.

*Дәлелдеу*. деп алайық. және

болсын. Олай болмаған жағдайда (1.4.4) теңсіздігі тривиалды. Сонда Лемма 1.4.А бойынша өлшемі t-дан аспайтын әрбір жиыны үшін келесі теңсіздік орындалады:

Атап айтқанда,

сонда , осыдан ([40, р. 41]) және функциясы жиынында интегралданады. Келесі функцияларды анықтаймыз:

мұнда функциясы келесі түрде анықталады:

Осыдан және

(1.4.5)

Демек,

Лемма 1.4.2 бойынша келесі теңсіздік орын алады:

1.4.1-лемма бойынша

(1.4.5) және (1.4.6) бойынша алатынымыз:

бұл жерде үшінші жолда өспелі екендігін ескердік (өйткені ). Демек,

(1.4.7)

Әрі қарай, келесі теңсіздікті ескеріп

(1.4.6) және (1.4.7) бойынша төмендегі теңсіздікті аламыз:

*Теорема 1.4.1 дәлелденді*.

Келесі теоремада алдыңғы теоремада алынған (1.4.7) теңсіздігінің монотонды кемімелі функциялар класында жақсармайтыны көрсетіледі.

*Теорема 1.4.2*[42, р. 18]. Айталық болсын. Онда (1.4.4) теңсіздік әрбір үшін дәл болады, яғни, б.ж.д. (0,∞) жиынында орындалатындай функциясы бар болады және келесі теңсіздік орындалады

, (1.4.8)

мұндағы тек және -нен тәуелді болатын оң тұрақты.

*Дәлелдеу*. Айталық, болсын, функциясын келесідей анықтаймыз:

Сонда б.ж.д. жиынында. Берілген үшін келесі белгілеуді енгізейік

теңсіздігі орындалатындай әрбір үшін

функциясының анықтамасын және сфералық координаталарға көшуді пайдаланып, төмендегі теңдікті аламыз:

(1.4.9) және (1.4.10) бойынша алатынымыз:

мұнда

Демек,

теңдігін ескеріп, жоғарыдағы теңсіздіктің екі жағынан өспейтін алмастыру алсақ, (1.4.8) теңсіздік орын алады. *Теорема 1.4.2 дәлелденді*.

*Ескерту 1.4.1.* , үшін классикалық бөлшекті-максималды операторы үшін 1.4.1 және 1.4.2 теоремалар [43, р. 278] жұмыста дәлелденген.

Келесі теоремада класында жатқанда жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруының (1.4.4) бағалауынан жақсырақ бағалауы алынады (өйткені , Лемма 1.1.1 қараңыз).

*Теорема 1.4.3*[42, р. 18]. Айталық болсын. Онда тек және -нен тәуелді болатын оң тұрақтысы табылып, барлық үшін келесі теңсіздік орындалады:

(1.4.11)

*Дәлелдеу*. Теорема 1.4.1 және Лемма 1.2.1 қолдану арқылы келесі теңсіздікті аламыз

*Теорема 1.4.3 дәлелденді.*

*Ескерту 1.4.2.* Лемма 1.3.1 бойынша

, . (1.3.2)

теңсіздігі орындалады. Сондықтан жалпыланған Рисс потенциалы арқылы жоғарыдан бағалаулар жалпыланған бөлшекті-максималды функция үшін де орындалады. Бірақ, 1.4.3 теоремасында алынған бағалау жалпыланған Рисс потенциалы үшін белгілі жоғарыдан бағалаудан жақсырақ екенін көрсетуге болады.

Шынында да, иірімнің өспейтін алмастыруы үшін жалпыланған Рисс потенциалы O’Neil [44, р. 132] бағалауын қанағаттандыратыны белгілі

мұндағы тек және -ге тәуелді.

Содан кейін Лемма 1.3.1 бойынша және -ге тәуелді қандай да бір үшін келесі теңсіздікті

аламыз, мұндағы , .

жағдайында (1.4.11) бағалау (1.4.12) бағалаудан жақсырақ екенін дәлелдейік.

Ол үшін өспейтін алмастыруы төмендегідей болатын

жиынында анықталған функциясын қарастырамыз. Осы функциясы үшін (1.4.11) бағалаудың оң жағы шеннелген, ал (1.4.12) бағалаудың оң жағы шенелмейтіндігін көрсетейік.

Шынында да, (1.2.6) бойынша

мұндағы тұрақтылары тек және -ге тәуелді.

(1.4.12) теңсіздіктің оң жағындағы екінші қосылғыш үшін келесі өрнекті аламыз

мұндағы тұрақтысы тек және –ге тәуелді.

*Теорема 1.4.4*[42, р. 18]. Айталық, болсын. Әрбір функциясы үшін тек және -ге тәуелді саны табылып, төмендегі теңсіздік орындалады

(1.4.13)

*Дәлелдеу*. анықтамасынан келесі теңдік

үшін орындалады. Содан Теорема 1.4.1 теоремасы бойынша және өспейтін функция екенін ескере отырып, келесі өрнекті аламыз

сондықтан (1.4.13) теңсіздік (1.2.6)-дан шығады.

**1.5 Жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруының конустары**

Бұл бөлімшеде біз жалпыланған бөлшекті-максималды функциялардың кеңістігін қарастырамыз және жалпыланған бөлшек максималды функцияның өспейтін алмастыруы нәтижесінде пайда болатын әртүрлі конустарды зерттейміз. Мұндай конустардың эквивалентті сипаттамалары және олардың өзара бүркеу шарттары келтіріледі.

*Анықтама 1.5.1* [31, р. 824]. үшін арқылы оң біртекті функционалдармен жабдықталған аралығында өлшенетін теріс емес функциялардан тұратын келесі қасиеттерге ие конустар жиынын белгілейміз:

1) , , ;

2) барлық жерде дерлік .

*Анықтама 1.5.2*. Айталық, , болсын. конусы конусын бүркейді деп атаймыз(белгілеуі: ) егер және болатын сандары табылып, кез келген үшін бар болып мынадай теңсіздіктер орындалса:

Конустар эквивалентті деп атаймыз егер

шарттары орындалса.

Айталық, ауыстырмалы-инварианттық кеңістік болсын. жалпыланған бөлшекті-максималды функциялар кеңістігі болсын. Жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруынан құрылған, біртекті функционалдармен жабдықталған 4 түрлі конусын қарастырамыз:

(1.5.1)

(1.5.2)

(1.5.3)

(1.5.4)

(1.5.5)

(1.5.6)

Бұл және конустары жалпыланған бөлшекті-максималды функциялардың өспейтін алмастыруынан тұратынын білдіреді.

*Лемма 1.5.1.* Аталық, болсын. және конустары үшін келесі бүркеу орынды

*Дәлелдеу*. Айталық, болсын. Сонда функциясы бар болады

үшін келесі теңдікті қанағаттандыратын функциясын анықтаймыз

Сонда және ((1.1.7), (1.2.1), (1.2.2) қараңыз),

функциясының өспейтін алмастыруына қатысты

теңсіздігінен келесі теңдікті аламыз

Сонда орын алады. Сонымен қатар (1.5.2), (1.2.7), (1.2.3), (1.5.1) қараңыз)

екенін дәлелдедік. *Лемма 1.5.1 дәлелденді*.

Келесі теорема , , конустарының эквивалентті сипаттамасын береді.

*Теорема 1.5.1.* Айталық, болсын. Онда , және конустары эквивалентті:

*Дәлелдеу.*

1) бүркеуі 1.5.1- леммада дәлелденді.

2) екенін дәлелдейік. Айталық, болсын, онда функциясы бар болады және

үшін келесі шартты қанағаттандыратын функциясын аламыз

Демек,

(1.5.7)

Теорема 1.4.3 бойынша

(1.5.8)

функциясын келесідей белгілейік

Демек, (1.5.7), (1.5.8) өрнектерінен екенін көреміз және

бүркеуі дәлелденді.

3) Енді болғанда бүркеуі орындалатынын дәлелдейміз. Айталық, болсын. Сонда келесі теңдік орындалатындай бар болады

1.4.2 теоремасына сәйкес үшін аймағында б.ж.д. болатындай жиынында функциясы бар болып, келесі теңсіздік орындалады:

функциясын келесідей анықтайық:

Осыдан

бүркеуі дәлелденді. *1.5.1 теорема дәлелденді.*

*Теорема 1.5.2.* 1) Айталық, болсын. Онда

2) Егер болса, онда

3) Егер болса, онда

*Дәлелдеу*. 1) Айталық, болсын. Сонда келесі теңдік орындалатындай функциясы бар болады:

(1.5.9)

және ((1.1.7), (1.5.6) қараңыз)

(1.5.10)

Келесі

теңсіздігі бойынша (1.5.9) теңдіктен келесі теңсіздікті аламыз:

конусының функциясы

Сонда

Сонымен қатар ((1.5.10), (1.5.4) қараңыз)

*1)-тармақ дәлелденді.*

2) Айталық, болсын. Сонда келесі теңдік орындалатындай функциясы бар болады:

және ((1.1.7), (1.5.6) қараңыз)

(1.5.11)

1.4.4 теорема бойынша

Оң жағындағы қосындыны деп белгілейік:

Сонымен,

Сонымен қатар ((1.5.6), (1.5.11) қараңыз)

*2)-тармақ дәлелденді.*

3) 3-тармақ 1 және 2-тармақтардан шығады. 1.5.2 теорема дәлелденді.

*Салдар 1.5.1.* Егер болса, онда

1.5.1 салдар 1.5.1 теоремадан және 1.5.2 теоремадан шығады.

**1.6 Жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруынан туындаған конустар мен жалпыланған Рисс потенциалының өспейтін алмастыруынан туындаған конустарды салыстыру**

1.6-бөлімшеде жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруынан туындаған конустар және жалпыланған Рисс потенциалының өспейтін алмастыруынан туындаған конустарды салыстыру қарастырылады.

М.Л. Голдман [31, р. 818] және басқа да авторлардың еңбектерінде [35, р. 43] жалпыланған Рисс потенциалының өспейтін алмастыруынан туындаған конустар қарастырылған. Олар -өлшемді евклидтік кеңістікте жалпыланған Рисс потенциалының кеңістігі зерттелген:

мұнда ауыстырмалы-инварианттыө кеңістік. Бұл жұмыстарда оң біртекті функционалдармен жабдықталған жалпыланған Рисс потенциалының өспейтін алмастыруынан туындаған және оң біртекті функционалдармен жабдықталған келесі конустар қарастырылған:

үшін

Сонымен қатар, [31, р. 823] жұмыста оң біртекті функционалмен жабдықталған келесі конус қарастырылған

бұл конус келесі біртекті функционалмен жабдықталған:

мұнда

. (1.6.1)

Төмендегі теоремада жалпыланған бөлшекті-максималды функциядан туындаған конустар және жалпыланған Рисс потенциалынан туындаған конустар арасында салыстыруы көрсетілген.

*Теорема 1.6.1.* Айталық, болсын және ядросы (1.3.1) шартты қанағаттандырсын. Онда .

*Дәлелдеу*. Айталық, болсын, онда конусының анықтамасы бойынша болатындай функциясы бар болады. Сонымен, келесі теңсіздікті қанағаттандыратын функциясы бар болады:

Сонда

Сондықтан 1.4.1-теорема бойынша және функциясының монотондылығын ескере отырып келесі функцияны белгілеу арқылы

келесі және функцияларының салыстыруын аламыз:

Осы өрнектен функциясын

деп анықтасақ, келесі теңсіздік шығады:

,

яғни,

*1.6.1-теорема дәлелденді*.

**1 бөлім бойынша қорытынды**

Бұл бөлімде жалпыланған бөлшекті-максималды функция және оның кеңістіктері анықталды. Мұндай функциялардың өспейтін алмастыруының жоғарыдан әртүрлі бағалаулары алынды. Жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруынан құрылған 4 түрлі конустар қарастырылды. Олардың өзара бұркеу шарттары анықталды. Жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруынан туындаған конустар мен жалпыланған Рисс потенциалының өспейтін алмастыруынан туындаған конустарды салыстыру қарастырылды.

Әдебиеттерді шолуда бөлшекті-максималды функциялардың тарихы қысқаша қарастырылды.

Жұмысқа қажетті теорияның негізгі ұғымдарының анықтамалары берілді. Банах функционалды кеңістіктері, ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктер туралы мәліметтер келтірілді.

**2 ЖАЛПЫЛАНҒАН БӨЛШЕКТІ-МАКСИМАЛДЫ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ КЕҢІСТІКТЕРІН АУЫСТЫРМАЛЫ- ИНВАРИАНТТЫҚ КЕҢІСТІКТЕРГЕ ЕНГІЗУ**

**2.1 Жалпыланған бөлшекті-максималды функциялардың кеңістіктерін ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктерге енгізу критерийлері**

Бұл бөлімшеде алдыңғы бөлімшеде қарастырылған конустар жалпыланған бөлшекті-максималды функциялар кеңістігін ауыстырмалы инварианттық кеңістіктерге енгізу критерийін алу үшін қолданылады.

2.1 бөлімшеде жалпыланған бөлшекті-максималды функциялар кеңістігінің ауыстырмалы-инвариантты кеңістікке енгізу критерийлері алынады.

Айталық, , – оң біртекті функционалдарымен жабдықталған аралығында өлшенетін функциядан тұратын конустар жиыны болсын (1.5.1 анықтаманы қараңыз). – ауыстырмалы-инвариантты кеңістік, – олардың Люксембург өрнектеуі болсын.

*Анықтама 2.1.1.* Айталық, конус болсын. Онда енгізуі

1) білдіреді;

2) қандай да бір саны табылып келесі теңсіздік орындалатынын білдіреді

*Лемма 2.1.1*[31, р. 824]. Айталық, болсын. Әрбір Банах функциялық кеңістігі үшін, егер болса, онда .

*Салдар 2.1.1.*Айталық, болсын. Егер болса, онда .

жалпыланған бөлшекті-максималды функциялар кеңістігінің ауыстырмалы-инварианттық кеңістікке енгізу критерийлерін қарастырайық:

(2.1.1)

*Анықтама 2.1.2.* Айталық, - ауыстырмалы-инвариантты кеңістік болсын. (2.1.1) енгізуі үшін оңтайлы ауыстырмалы-инварианттық кеңістік дегеніміз және егер (2.1.1) енгізуі қандай да бір басқа ауыстырмалы-инварианттық кеңістігі үшін орындалса, онда .

*Теорема 2.1.1* [45, р. 60].Егер болса, онда (2.1.1) енгізу төмендегідей енгізуге эквивалентті болады

(2.1.2)

*Дәлелдеу.* (2.1.1) енгізуден тұрақтысы табылып, кез келген функциясы үшін келесі теңсіздік орындалады:

(2.1.3)

Анықтама бойынша кез келген үшін орындалатындай функциясы табылады және келесі теңсіздік орындалады:

(2.1.4)

(2.1.3) және (2.1.4) теңсіздіктерінен екендігі және

бағалауы орындалатыны шығады, яғни, (2.1.2) орындалады.

Керісінше, (2.1.2) енгізуі орынды делік. және үшін келесі бағалауды аламыз

бірақ, , сондықтан келесі бағалау нәтиже береді:

яғни, . *Теорема 2.1.1 дәлелденді.*

Келесі салдар 2.1.1-теоремадан және 2.1.1-салдардан шығады.

*Салдар 2.1.2.*

1) Айталық болсын. Онда

2) Айталық болсын. Онда

(2.1.5)

операторын келесі түрде енгізейік:

(2.1.6)

мұндағы , бұл жердегі жиыны (1.6.1) өрнекте анықталған.

*Теорема 2.1.2.* Айталық, болсын. Онда

(2.1.7)

енгізуі операторының -тен -ке шенелгендігіне эквивалентті.

*Дәлелдеу.* Шынында да, (2.1.7) енгізуі келесіні білдіреді

бұл операторының шенелгендігіне эквивалентті.

1.5.1-теорема және 2.1.1-теорема бойынша келесі енгізулерді аламыз:

**2.2 енгізуі үшін оңтайлы ауыстырмалы-инварианттық кеңістік**

Бұл бөлімшеде 2.1-бөлімшеде қарастырылған жалпыланған бөлшекті-максималды функциялар кеңістігінің ауыстырмалы-инварианттық кеңістікке

енгізуінің оңтайлы ауыстырмалы-инварианттық кеңістігі сипатталды.

*Анықтама 2.2.1.*Айталық, - ауыстырмалы-инварианттық кеңістік болсын. (2.1.1) енгізуі үшін оңтайлы ауыстырмалы-инварианттық кеңістік дегеніміз орындалатындай ауыстырмалы-инварианттық кеңістігі және егер (2.1.1) енгізу басқа ауыстырмалы-инварианттық кеңістігі үшін орындалса, онда . Мұндай оңтайлы ауыстырмалы-инварианттық кеңістік бөлшекті-максималды функциялар кеңістігінің ауыстырмалы-инварианттық қабықшасы деп аталады.

*Теорема 2.2.1.* Айталық, болсын. Егер ауыстырмалы-инвариантты кеңістігі

(2.1.1)

енгізуі үшін оңтайлы кеңістік болса, онда оның элементтерінің нормасы келесі эквивалентті нормамен анықталады (Люксембург өрнектеуі мағынасында):

Бұл теореманың дәлелдеуінде Г.Синнамонның [46] келесі нәтижесі пайдаланылады.

*Теорема 2.2.2*[46, р. 188].Айталық,болсын. Онда

*Дәләлдеу (Теорема 2.2.1)*.

2.1.1-теорема және 2.1.2-теоремаларға сәйкес (2.1.1) енгізуі операторының -тен -ке шенелгендігіне эквивалентті, яғни, келесі теңсіздікті дәлелдейміз:

кеңістігі үшін ассоцирленген кеңістігін пайдалана отырып және 2.1.1-теоремасын пайдаланып, келесі бағалауды аламыз:

Осы бағалаудан келесі норманы аламыз:

Осы жоғарыдағы нормадан бағалауы шығады. 2.2.1-теорема дәлелденді.

**2.3 салмақты Лоренц кеңістігін салмақты Лоренц кеңістігіне оңтайлы енгізу**

Бұл бөлімшеде келесі

(2.3.1)

кеңістігіннің кеңістігіне енгізуінің орындалуының жеткілікті шарты алынады.

салмақты Лоренц кеңістігі келесідей анықталады:

2.1.1. теорема және 2.1.2 теорема бойынша

енгізуі (2.1.1 қараңыз)

операторының (2.1.6 қараңыз) кеңістігінен кеңістігіне шенелген болуына эквивалентті, яғни, келесі теңсіздік орынды

мұнда , сәйкесінше және кеңістіктерінің Люксембруг өрнектеулері.

Енді ауыстырмалы инвариантты кеңістігінің орнына салмақты Лоренц кеңістігін және кеңістігінің орнына салмақты Лоренц кеңістігін алмастырып,

енгізу сұрағын қарастырамыз, мұндағы салмақты Лоренц кеңістігі (2.3.2) көрсетілген.

Жоғарыдағы келтірілген негіздеме бойынша бұл енгізу операторының кеңістігінен кеңістігіне шенелген болуына эквивалентті, яғни,

(2.3.3)

теңсіздігі орындалады.

Ал осы (2.3.1) енгізудің оңтайлы кеңістігі үшін (2.3.3) теңсіздіктен шығатын мына шаманы

зерттейміз.

Анықтама 2.3.1 [49]. Айталық, функциясы және болатындай аралыңында үзіліссіз қатаң өспелі функция болсын. Сонда *рұқсат етілген* деп айтамыз.

Айталық, функциясы рұқсат етілген функция болсын. функциясы бойынша кемімейтін функцияға, ал функциясы бойынша өспейтін функцияға эквивалентті болса, онда функциясын -квазиойыс деп айтамыз. -квазиойыс функциясы туындамаған дейміз, егер

Туындамаған -квазиойыс функциялар тобы арқылы белгіленеді. , болғанда квазиойыс деп айтамыз.

Келесі белгілеуді енгізейік:

(2.1.6) түрдегі операторы оң монотонды деп аталады, егер келесі шарттарды қанағаттандырса:

(i) , барлық және үшін;

(ii) , б.ж.д. үшін, егер б.ж.д. үшін оң тұрақтысы және функцияларынан тәуелсіз орындалса;

(iii) , және -ға тәуелсіз тұрақтысы бар барлық және үшін, мұндағы тұрақтысы бойынша -ге тең функция.

Теорема 2.3.А [23, с. 25]. Айталық, , болсын және оң оң монотонды оператор болсын. Онда келесі теңсіздік

конустарында және үшін орындалса, онда ең жақсы тұрақтылары үшін келесі теңсіздік орындалады:

Егер болса және операторы (i) және (ii) шарттарын қанағаттандыратын монотонды оператор болса, онда конусында (2.3.5) шартының орындалуы үшін (2.3.6) шарты жеткілікті болып табылады. Ал, егер болса, онда операторы (i)-(iii) шарттарды қанағаттандыратын жағдайда (2.3.5) шарттың конусында орындалуы үшін (2.3.6) шартының және

теңсіздігінің орындалуы жеткілікті

*Анықтама 2.3.2* [50]. Айталық, бүтін сандар болсын және болсын. Егер және үшін келесі шарт орындалса

онда оң өспейтін тізбегі *геометриялық кемімелі* деп аталады.

Егер және үшін

шарты орындалса, онда оң кемімейтін тізбегі *геометриялық өспелі* деп аталады.

*Лемма 2.3.1*[26, р. 7]. Айталық, функциясы бойынша теріс емес, кемімейтін, ақырлы және оң-үзіліссіз функция болсын. Онда (a,b) интервалының жабылуында элементтері бар , қатаң өспелі тізбегі бар болады

(i) егер болса, онда барлық үшін және ; егер болса, онда ;

(ii) егер ;

(iii) егер .

мұндағы .

*Анықтама 2.3.3.*Айталық, функциясы бойынша теріс емес, кемімейтін, ақырлы және оң-үзіліссіз функция болсын. Егер функциясы 2.3.1-лемманың (i)-(iii) шарттарын қанағаттандыратын болса, онда жағдайында қатаң өспелі тізбегі дискреттенетін тізбек деп аталады.

*Теорема 2.3.1.* Айталық, функциясы жиынында ақырлы болса, онда өлшемі бойынша теріс емес Борель өлшемі болсын. Егер тізбегі функциясының дискреттенетін тізбегі болса, онда -дегі барлық теріс емес және өспейтін функциялар үшін келесі эквиваленттік орындалады:

*Лемма 2.3.2* [26, р. 59]. геометриялық монотонды тізбегі функциясының дискреттеу тізбегі болсын. Онда

*Лемма 2.3.3.*Айталық, , бүтін сандар, ал және тізбегі барлық жерде дерлік геометриялық кемімелі тізбек болсын. Онда барлық теріс емес тізбегі үшін келесі эквиваленттілік орындалады:

және

2.3.2-теоремасын тұжырымдас бұрын келесі белгілеулерді енгізіп алайық, яғни:

және

болсын, мұндағы функциясы (2.3.4) түрде анықталған.

*Теорема 2.3.2.* Айталық, болсын. Онда келесі (2.3.1)

енгізуі үшін

шартының орындалуы жеткілікті, мұндағы және белгілеулері (2.3.7) және (2.3.8) белгілеулерде көрсетілген.

*Дәлелдеу.*Айталық, функциясы кез келген үшін бойынша жинақталатын болсын. Онда

(2.3.3)-тен жағдайында келесі өрнекті аламыз

Белгілеу енгізейік

жағдайында (2.1.6) белгілеудегі операторы үшін 2.3.А теоремасын қолданып, келесі шаманы аламыз

Теріс емес функциялар үшін Фуббини теоремасын қолданып,

интегралын аламыз. Осыдан шығатыны

Келесі белгідеуді енгізейік

Сонда бізде келесі теңдік шығады:

Расында да,

Жоғарыдағы енгізулерден және екені айқын, мұндағы

.

Әрі қарай келесі интегралды қарастырайық

(2.3.9) белгілеудегі функциясын келесі түрде жазайық

Айталық, тізбегі үшін дискреттеу тізбегі болсын. Онда Лемма 2.3.2 бойынша

геометриялық өспелі болуын пайдаланып, келесі түрдегі қосындыны аламыз:

(2.3.10) түрдегі белгілеуі келесі шамаға эквивалентті болады:

және де осы шаманың алымындағы қосылғыштарды жеке-жеке қарастыратын болсақ, келесі шамаларды аламыз:

Жоғарыдағы және шамаларын жеке-жеке қарастырайық:

мұнда .

2.3.3 лемма бойынша келесі бағалауды аламыз

Енді қарастырайық

Келесі теңсіздікті аламыз

, , екенін ескере отырып келесі эквиваленттікті аламыз:

Белгілеу енгізейік

Сонымен, теңсіздіктердің басы мен соңын бір түрде жазсақ,

Сондықтан операторы кеңістігінен кеңістігіне шенелген болуына эквивалентті, яғни, (2.3.3) теңсіздігі орындалады:

Содан (2.3.1)

енгізуі үшін жеткілікті шарт алынды. *Теорема дәлелденді.*

**2.4 салмақты Лоренц кеңістіктеріндегі жалпыланған бөлшекті-максималды функция операторының шенелгендігі туралы**

2.4-бөлімшеде жалпыланған бөлшекті-максималды функциясының өлшемді Лоренц кеңістігінен өлшемді Лоренц кеңістігіне шенелгендігін қамтамасыз ететін және салмақты функциялары үшін шарттар алынған . Классикалық бөлшекті-максималды функция үшін мұндай нәтиже [8, р. 59-89] еңбекте алынған.

Харди-Литтлвуд классикалық максималды операторы үшін

ауыстырмалы теңсіздігі орындалады ([40, р. 122]).

Айталық және аралығындағы теріс емес өлшемді функциясы берілген болсын, классикалық өлшемді Лоренц кеңістігі -дегі барлық өлшемді функциялардың жиыны болады және (2.3.2) ақырлы болады:

Айталық, функциясы бойынша өлшемді және теріс емес болсын және өлшемді Лебег кеңістіктері

болатын бойынша өлшемді барлық функцияларының кеңістігі болсын.

Төмендегі теорема осы жұмыстың негізгі нәтижесі болып табылады.

*Теорема 2.4.1.* Айталық, , , және – аралығында теріс емес және өлшенетін функциялар болсын. жалпыланған бөлшекті-максималды операторы -дан -ге шенелген болады сонда және тек сонда, егер оң тұрақтысы бар болып, келесі теңсіздіктер

барлық үшін орындалса.

Классикалық бөлшекті-максималды оператор үшін 2.4.1-теорема [42, р. 13-22] жұмыста дәлелденді.

2.4.1-теореманы дәлелдеуде 1.4.1 және 1.4.2 теоремалар мен келесі нәтижелер қолданылады.

*Theorem 2.4.А*[51]. Айталық, және функциялары бойынша теріс емес өлшемді функциялар болсын. Егер болса, онда барлық теріс емес және өспейтін функциялары үшін Харди-Литтлвуд максималды операторы -дан -ге шенелген болады, сонда және тек сонда, егер келесі шарттардың екеуі де орындалса:

бойынша анықталған операторы үшін салмақты норма теңсіздігін дәлелдеуден бастаймыз

*Лемма 2.4.1*[52]. Айталық , болсын және функциялары теріс емес және өлшемді функциялар болсын. функциясы әрбір үшін

шартын қанағаттандырсын. Онда оң тұрақтысы табылып, әрбір үшін

(2.4.2)

теңсіздігі орындалады, сонда және тек сонда ғана, егер барлық үшін (2.4.1) теңсіздігі орындалса.

*Дәлелдеу (Лемма 2.4.1). Қажеттілік шарты.*

Кез келген үшін

шарты орындалатыны белгілі. (2.4.1) қажеттілігінен (2.4.2) теңсіздіктегі деп қарастырайық.

(2.4.2) теңсіздіктің сол жағы үшін монотондылығын пайдалану арқылы біз келесі теңдікті аламыз:

(2.4.2) теңсіздіктің оң жағы үшін:

яғни (2.4.1) шарт қанағаттандырылады.

Жоғарыдағы екі теңдіктен және (2.4.2) теңсіздігінен (2.4.1) теңсіздігі шығады.

*Жеткіліктілік шарты*. (2.4.1) шарт қанағаттандырылсын және оң өлшемді жиында болсын. Сонда (2.4.1) теңсіздіктің оң жағы

мәнін береді. Демек, келесі теңдік орындалатындай аралығында өспелі тізбегі бар болады

және -де компактілі болатын үзіліссіз функциясы үшін (2.4.2) тексеру жеткілікті. Мұндай үшін келесі жиыны:

бос емес жиын. деп алып, анықтайық

Сонда келесі теңдікті аламыз

Сонымен қатар, жиынының белгілеуі бойынша анықтамасынан пайда болатын жиынында супремумге жетеді. Сондықтан әрбір және үшін бізде болады

(2.4.4)

Осылайша (2.4.4) арқылы келесі өрнекті аламыз

Демек, (2.4.1.), (2.4.3) және монотондылығы мен теңсіздігі бойынша келесі теңсіздікті аламыз

Яғни, (2.4.2) теңсіздігі орындалады. *2.4.1 лемма дәлелденді*.

*Дәлелдеу (теорема 2.4.1)*. Бізге келесі теңсіздікті дәлелдеу керек

1.4.1 теорема және 2.4.1 лемма бойынша:

Енді 2.4.А-теорема негізінде:

*2.4.1-теорема дәлелденді*.

**2 бөлім бойынша қорытынды**

Бұл жұмыста біз жалпыланған бөлшекті-максималды операторды қарастырдық. Мұндай оператор үшін бір салмақты Лоренц кеңістігінен басқа салмақты Лоренц кеңістігіне шенелген болуының қажетті және жеткілікті шарттары алынды. Табылған шарттар Лоренц кеңістіктерін анықтайтын салмақтық функцияларға және жалпыланған бөлшекті-максималды операторды анықтайтын функцияға жүктеледі.

**ҚОРЫТЫНДЫ**

Диссертациялық жұмыста жалпыланған бөлшекті-максималды функциялар кеңістігі қарастырылды. Жалпыланған функцияларды анықтайтын Ф функциясын үш түрлі класстарда қарастырылады. Олардың арасындағы байланыс анықталды. жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруының жоғарыдан бағалаулары алынды. Соның негізінде төрт түрлі монотонды кемімелі функциялардан тұратын конустар анықталды. Олардың өзара бүркеу шарттары келтірілді.

Жалпыланған бөлшекті-максималды функциялар кеңістігі мен жалпыланған Рисс потенциалдары кеңістігі арасында салыстыру келтірілді.

Жалпыланған бөлшекті-максималды функциялар кеңістігінің ауыстырмалы инвариантты кеңістікке енгізу шарттары анықталды, бұл енгізуге оңтайлы болатын ауыстырмалы инвариантты кеңістіктің нормасына эквивалентті шама көрсетілді.

Супремальды оператордың бір Лоренц кеңістігінен екінші Лоренц кеңістігіне шенелген болуының шарттары алынды.

Алынған негізгі нәтижелер:

– жалпыланған бөлшекті-максималды функция анықталды, ол белгілі бір жағдайда классикалық бөлшекті-максималды функциямен сәйкес келеді;

– жалпыланған бөлшекті-максималды функцияның өспейтін алмастыруы үшін әртүрлі бағалаулар алынды;

– функциялардың өспейтін алмастыруымен байланысты әр түрлі конустар құрастырылды және мұндай конустарды өзара бүркеу мәселелері зерттелді;

– жалпыланған бөлшекті-максималды функциялардың кеңістігін ауыстырмалы-инварианттық кеңістіктерге енгізу шарттары алынды;

– мұндай енгізу үшін оңтайлы ауыстырмалы-инвариантты кеңістіктің сипаттамасы алынды.

Алынған нәтижелер М.Л. Гольдман, А. Гоготишвили, А. Цианчи, Р. Керман, Б. Опик, Л. Пик, Е. Бақтыгареева, Н.А. Боқаев, Г.Ж. Каршыгина және т.б. жұмыстарының жалғасы болып табылады.

Алынған нәтижелер 4 мақалада ([42, р. 13-22; 45, р. 53-61; 48, р. 7-13; 52, р. 3-9; 53]) және 15 конференциялар тезистерінде жарияланды. Оның ішінде 2 мақала Scopus базасында индекстелетін журналда («Eurasian Mathematical Journal», процентиль – 49, «Bulletin of the Karaganda university. Mathematics Series», процентиль – 35), 2 мақала Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым және жоғары білім саласындағы сапаны камтамасыз ету комитеті ұсынған журналдарда жарияланды.

Бұл нәтижелерді функциялар теориясында және функционалдық анализде басқа да кеңістіктерді зерттеуде пайдалануға болады.

Алынған нәтижелерді студентттерге, магистранттарға арнайы курс оқығанда пайдалануға болады.

# ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Никольский С.M. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 455 с.
2. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральное представление функций и теоремы вложения. – М.: Наука, 1996. – 479 с.
3. Трибель Х. Теория функциональных пространств / пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 447 с.
4. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы / пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
5. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / пер. с англ. – М.: Мир, 1973. – 342 с.
6. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах / пер. с англ. – М.: Мир, 1974. – 336 с.
7. Nakai E. Hardy-Littlewood maximal operators and the Riesz potential on generalized Morrey spaces // Math.Nachr. – 1994. – Vol. 166, №1. – P. 95-103.
8. Hakim D.I., Nakai E., Sawano Y. Generalized fractional maximal operators and vector-valued inequalities on generalized Orlicz-Morrey spaces // Rev Mat. Complut. – 2016. – Vol. 29. – P. 59-90.
9. Guliyev V., Samko S., Hasanov J. Boundedness of maximal, potential type,and singular integral operators in the generalized variable exponent Morrey type spaces // J. Math. Sciences. – 2010. – Vol. 170, №4. – P. 423-442.
10. Guliyev V., Samko S. Maximal, potential, and singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces on unbounded sets // J. Math. Sciences. – 2013. – Vol. 193, №2. – P. 228-247.
11. Almedia A., Hasanov J.J., Samko S.G. Maximal, potential operators in variable exponent Morrey spaces // Georgian Math. J. – 2008. – Vol. 15, №2. – P.195-208.
12. Guliyev V.S., Hasanov J.J., Samko S.G. Boundedness of the Maximal, potential and singular operators in the generalized variable exponent Morrey spaces // Math. Scand. – 2010. – Vol. 107. – P. 285-304.
13. Kokilashvili V., Meskhi A. Maximal functions and potentials in variable exponent Morrey spaces with njndoubling measure // Complex.Var.Elliptic Equ. – 2010. – Vol. 55, №8-10. – P. 923-936.
14. Edmunds D., Kokilasvili V., Meskhi A. On the boundedness and compactness of weighted Hardy operators in spaces // Georg. Math. J. – 2005. – Vol. 12, №1. – P. 27-44.
15. Burenkov V.I., Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces // Eurasian Math. J. – 2012. – Vol. 3, №3. – P. 11-32.
16. Burenkov V.I., Recent progress in studying the boundedness of classical operators of real analysis in general Morrey-type spaces // Eurasian Math. J. – 2013. – Vol. 4, №1. – P. 21-45.
17. Burenkov V.I., Guliyev H.V. Necessary and suffcient conditions for boundedness of the maximal operator in the local Morrey-type spaces // Studia Mathematica. – 2004. – Vol. 163, №2. – P. 157-176.
18. Burenkov V.I., Guliyev V.S. Necessary and suffcient conditions for boundedness of the Riesz potential in the local Morrey-type spaces // Potential Anal. – 2009. – Vol. 30, №3. – P. 211-249.
19. Burenkov V.I., Guliyev H.V., Guliyev V.S. Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in the local Morrey-type spaces // J. of Computational and Applied MathemPatics. – 2007. – Vol. 208. – P. 280-300.
20. Burenkov V., Guliev H. Necessary and sufficient conditions for boundedness of the Riesz potential in the local Morrey-type spaces // Potential Anal. – 2009. – №31. – P. 1-39.
21. Burenkov V.I., Gogatishvili A., Guliyev V.S. et al. Boundedness of the fractional maximal operator in local Morrey-type spaces, Complex Analysis and Elliptic Equations. – 2010. – Vol. 55, №8-10. – P. 739-758.
22. Gogatishvili A., Pick L., Opic B. Weighted inequalities for Hardy-type operators involving suprema // Collect. Math. – 2006. – Vol. 57, №3. – P. 227-252.
23. Гогатишвили А., Степанов В.Д. Редукционные теоремы для весовых интегральных неравенств на конусе монотонных функций // Успехи математических наук. – 2013. – Т. 68, №4(412). – С. 3-68.
24. Gogatishvili A., Neves I.S., Opic B. Optimality of embeddings of Bessel-potential-type spaces // Function spaces, differential operators and nonlinear analysis: proceed. of the conf. held in Milovy. – Prague, 2005. – P. 97-102.
25. Gogatishvili A., Mustafayev R., Unver T. Embedding relations between weighted complementary local Morrey-type spaces and weighted local Morrey-type spaces // Eurasian Mathematical Journal. – 2017. – Vol. 8, №1. – P. 34-49.
26. Evans W.D., Gogatishvili A., Opic B. Weghted Inequalities Involving *p*-quasiconcave Operators. – Singapore, 2018. – 140 p.
27. Guliyev V., Hasanov J., Badalov X. Commutators of Riesz potential in the vanishing generalized Morrey spaces with variable exponent // J. Math. Sciences. – 2019. – Vol. 22, №1. – P. 331-351.
28. Guliyev V., Hasanov J. Maximal and singular integral operators and their commutators on generalized weighted Morrey spaces with variable exponent // Math. Ineq. Appl. – 2018. – Vol. 21. – P. 41-61.
29. Guliyev V.S. Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces // J. Inequal. Appl. – 2009. – P. 503948-1-503948-20.
30. Goldman M.L., Bakhtigareeva E.G. Application of general approach to the theory of Morrey-type spaces // Mathematical Methods in the Applied Sciences. –2020. – Vol. 43, №16. – P. 1-13.
31. Goldman M.L. On the cones of rearrangements for generalized Bessel and Riesz potentials // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2010. – Vol. 55, №8-10. – P. 817-832.
32. Goldman M.L. On optimal embedding of generalized Bessel and Riesz potentials // Proc. Steklov Inst. Mathem. – 2010. – Vol. 269. – P. 101-123.
33. Goldman M.L. Some constructive criteria of optimal embeddings for potentials // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2011. – Vol. 56, №10-11. – P. 1-19.
34. Goldman M.L., Bakhtigareeva E.G. Some classes of operators in general Morrey-type spaces // Eurasian Math. J. – 2020. – Vol. 11, №4. – P. 35-44.
35. Bokayev N.A., Goldman M.L., Karshygina G.Zh. Cones of functions with monotonicity conditions for generalized Bessel and Riesz potentials // Math.Notes. – 2018. – Vol. 104, №3. – P. 30-45.
36. Bokayev N.A., Goldman M.L., Karshygina G.Zh. Criteria for embeddings of generalized Bessel and Riesz potential spaces in rearrangement invariant spaces // Eurasian Math. J. – 2019. – Vol. 10, №2. – P. 8-29.
37. Chen Y., Ding Y. Compactness of commutators for singular integrals on Morrey Spaces // Canad. J. Math. – 2012. – Vol. 64, №2. – P. 257-281.
38. Chen Y., Ding Y., Wang X. Compactness of commutators of Riesz potential on Morrey space // Potential Anal. – 2009. – Vol. 30, №4. – P. 301-313.
39. Mizuhara T. Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces Harmonic Analisis // ICM 90 Satellite: proceed. conf. – Tokyo: Springer-Verlag, 1991. – P. 183-189.
40. Bennett C., Sharpley R. Interpolation of Operators. – London: Academic Press, 1988. – 469 p.
41. Krein S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M. Interpolation of Linear Operators. – M.: Nauka, 1978. – 400 p.
42. Bokayev N.A., Gogatishvili A., Abek A.N. On estimates of non-increasing rearrangement of generalized fractional maximal function // Eurasian Math. Journal. – 2023. – Vol. 14, №2. – P. 13-23.
43. Cianchi A., Kerman R., Opic B., Pick L. A sharp rearrangement inequality for the fractional maximal operator // Studia Mathematica. – 2000. – Vol. 138, №3. – P. 277-284.
44. O'Neil R. Convolution operators and L(p,q) Spaces // Duke Math. J. – 1963. – Vol. 30, №1. – P. 129-142.
45. Bokayev N.A., Gogatishvili A., Abek A.N. Cones generated by a generalized fractional maximal function // Bulletin of the Karaganda university Mathematics series. – 2023. – Vol. 110, №2. – P. 53-62.
46. Sinnamon G. Transferring monotonicity in wighted norm inequalities // Collect. Math. – 2003. – Vol. 54, №2. – P. 181-216.
47. Grafakos L. Modern Fourier Analysis. – NY.: Springer, 2009. – 507 p.
48. Abek A.N., Khairkulova A.A., Turgumbaev M.ZH., On non-increasing rearrangements of the generalized fractional maximal function // Bulletin Abai KazNPU. – 2023. – Vol. 82, №2. – P. 7-14.
49. Andersen F., John T.Weighted inequalities for vector-valued maximal functions and singular integrals // Studia. Math. – 1980. – №69. – P. 19-31.
50. Evans W.D., Gogatishvili A., Opic B. The reverse Hardy inequality with measure // Mathematical Inequalities and Applications – 2007. – Vol. 11, №1. – P. 43-74.
51. Sawyer E. Boundedness of classical operators on classical lorentz spaces // Studia Mathematica. – 1990. – Vol. 96, №2. – P. 145-158.
52. Abek A.N., Turgumbaev M.ZH., Suleimenova Z. On the boundedness of a generalized fractional-maximal operator in Lorentz spaces // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science – 2023. – Vol. 118, №2. – P. 3-10.
53. Bokayev N.A., Gogatishvili A., Abek A.N. On non-increasing rearrangements of generalized fractional maximal functions // Вестник Актюбинского регионального университета им. К. Жубанова. – 2022. – Т. 67, №2. – С. 24-29.